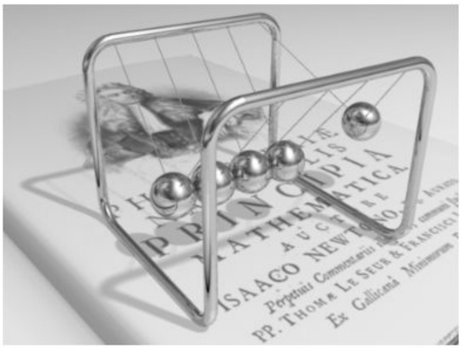
Tema 5. Dinámica



En la antigua Grecia, Aristóteles distinguía entre el mundo celeste, en el que el movimiento era perfecto, uniforme y sin fin, y el mundo terrestre, en el que el estado natural de los cuerpos era el reposo.

Los movimientos terrestres eran violentos, si los cuerpos ese sacaban de su lugar natural por contacto con otros cuerpos, o naturales, si el cuerpo trataba de recuperar su lugar cuando cesa el contacto con otros cuerpos (el humo ascendía y las piedras caían).

Los movimientos violentos eran consecuencia de fuerzas que tiraban (un buey de una carreta) o empujaban (el viento a la vela del barco).

Galileo Galilei (1564-1642), midiendo todo lo que observaba, estableció que no era necesaria la intervención de otro cuerpo para mantener el movimiento del primero. Por tanto, no era necesaria una fuerza para mantener el movimiento de un cuerpo.

Posteriormente, **Isaac Newton** (1642-1727), el mayor genio científico de la historia del hombre - con permiso de Einstein- fue quien, basándose en los trabajos de Galileo, propuso las tres leyes que llevan su nombre, que en ese momento revolucionaron el conocimiento científico y que todavía siguen en vigor hoy en día.

En su libro ***Principios matemáticos de la Filosofía natural*** [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica], publicado en 1687, se recogen sus descubrimientos en el cálculo matemático y la mecánica. Se considera como la obra de contenido científico más importante que se ha escrito.

En este tema vas a profundizar en la utilización de las fuerzas para resolver problemas dinámicos en casos de particular interés: cuando hay cuerpos enlazados, si hay fuerzas que tienen componentes en los ejes coordenados, cuando se producen choques y en movimientos en trayectorias curvilíneas, además de tener en cuenta la presencia de fuerzas gravitatorias y de fuerzas eléctricas.

1. Fuerzas

Cuando empujas un cuerpo, golpeas una pelota o estiras un muelle estás interaccionando con el cuerpo, la pelota o el muelle. Esta interacción hace que se desplace el cuerpo, cambie su velocidad la pelota o se deforme el muelle.

Para que un cuerpo interaccione es necesario que exista otro cuerpo; es decir, las interacciones tienen un origen material.

Seguro que has visto como un imán atrae a un clavo de hierro o cómo cae un objeto. Las interacciones entre dos cuerpos no sólo se producen por contacto, ya que también se producen a distancia.

Si observas los efectos que produce una interacción, notarás que son distintos según sea la intensidad de la misma, la dirección en que se produce, su sentido y el punto donde se aplica.

Es decir, una interacción debe representarse mediante una magnitud vectorial: las fuerzas son magnitudes vectoriales.

¿Qué es una fuerza?

Una fuerza es una **medida de la interacción entre dos cuerpos**, que puede dar lugar a cambios en:

- Su velocidad.
- Su forma.
- La dirección en la que se mueven.

La fuerza es el resultado de la interacción de dos cuerpos, pero no es algo que se acumule en ellos: una persona forzuda sería aquella que es capaz de desarrollar una gran fuerza, pero no es que contenga fuerza en sí misma.

Las fuerzas son magnitudes vectoriales

Las fuerzas se representan mediante un vector, que es una flecha cuya longitud indica la **magnitud** de la fuerza, su **dirección** es la de la fuerza, el origen indica el **punto de aplicación** y la orientación del extremo el **sentido** de la fuerza.

Resultante de dos fuerzas

Cuando sobre un cuerpo actúan dos fuerzas, se podrían sustituir por una única fuerza que produzca el mismo efecto que ellas: esa fuerza es su resultante.

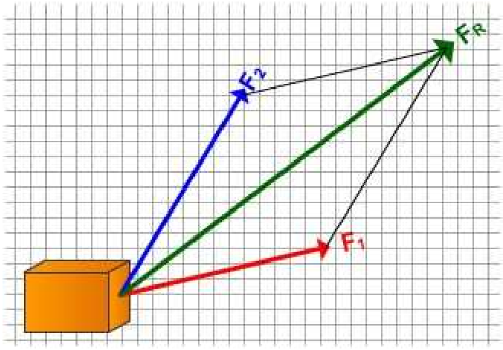
Si son **de la misma dirección y sentido**, la resultante tiene la misma dirección y el mismo sentido, y su magnitud es la suma de las magnitudes de las dos fuerzas.

Si son **de la misma dirección y de sentidos contrarios**, la resultante tiene la misma dirección, el sentido de la fuerza mayor magnitud, y su magnitud es la diferencia de las magnitudes de las dos fuerzas.

Si las fuerzas son **perpendiculares** puedes calcular la magnitud de la fuerza resultante utilizando el teorema de Pitágoras.

Fuerzas que forman un ángulo cualquiera

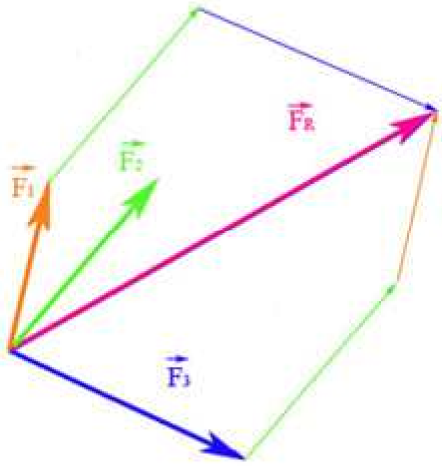
En este caso, puedes calcular el módulo de la fuerza resultante utilizando el teorema del coseno, que es una generalización del teorema de Pitágoras cuando el ángulo es distinto de 90º, y que también es válido cuando el ángulo entre los vectores es 0º (vectores de la misma dirección y sentido) o 180º (vectores de la misma dirección pero sentido contrario).

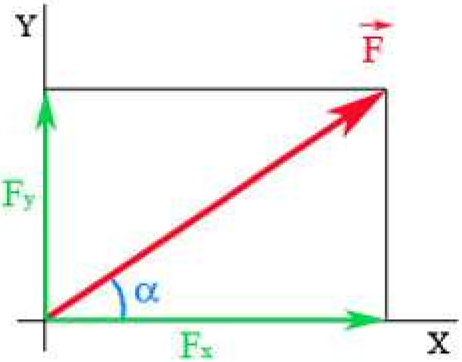


$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2ab\ \cos\alpha}$$

La resultante de varias fuerzas

Si actúan varias fuerzas (F1, F2, F3, ...), se hace la resultante R1 de F1 y F2, después la resultante de R1 y F3 y así sucesivamente, utilizando la regla del paralelogramo.





Para calcular la fuerza resultante es muy útil descomponer las fuerzas en sus componentes cartesianas rectangulares y obtener las componentes de la resultante sumando las respectivas componentes.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = F\ \cos\alpha\, \vec{i} + F\ sen\alpha\ \vec{j}$$

1.1 Midiendo fuerzas

Cuando tiras del extremo de un muelle, se alarga. Es algo que todo el mundo sabe. Pero ¿los muelles se estiran por igual si se les aplica la misma fuerza? ¿Depende el estiramiento de la fuerza aplicada?

El newton

Sobre un cuerpo actúa siempre al menos una fuerza: la atracción que la Tierra ejerce a distancia sobre él, llamada **peso**. Si la masa del objeto es **m**, su peso es **mg**. Pues bien, sobre una masa de un kg la Tierra ejerce una fuerza de 9,8 newtons (9,8 N), donde **el newton es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional**.

La ley de Hooke

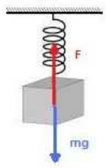
Para establecer la relación entre fuerza y alargamiento, vas a realizar la siguiente experiencia en el laboratorio, y después comprobarás los resultados utilizando un simulador.

A partir de datos experimentales, la ley de Hooke afirma que el estiramiento producido al aplicar una fuerza F a un muelle es directamente proporcional al valor de la fuerza y al tipo de muelle, de acuerdo con la expresión **$\Delta x=kF$**.

También se puede expresar diciendo que la fuerza necesaria para producir un alargamiento Δx es proporcional al valor del alargamiento, y entonces se expresa como **$F=k\Delta x$**.

Ten en cuenta que la K tiene un significado distinto en cada caso: en el primero es el alargamiento producido al aplicar al muelle la unidad de fuerza, mientras que en el segundo es la fuerza que hay que aplicar al muelle para producir un alargamiento unidad.

El dinamómetro



Un dinamómetro no es mas que un muelle calibrado, de forma que en lugar de indicar cuánto se estira marca el valor de la fuerza necesaria para producir ese estiramiento.

Si observas diferentes dinamómetros verás que si el muelle es poco consistente, se estira mucho aplicando poca fuerza, pero si se trata de un muelle hecho con hilo grueso, necesita una fuerza muy intensa para estirarse.

Para saber el peso de un objeto, no tienes mas que colgarlo y leer lo que marca el dinamómetro. Fíjate en el dibujo: el bloque de peso mg estira el muelle, que realiza una fuerza F para sostenerlo. Esta fuerza es la que marca el dinamómetro.

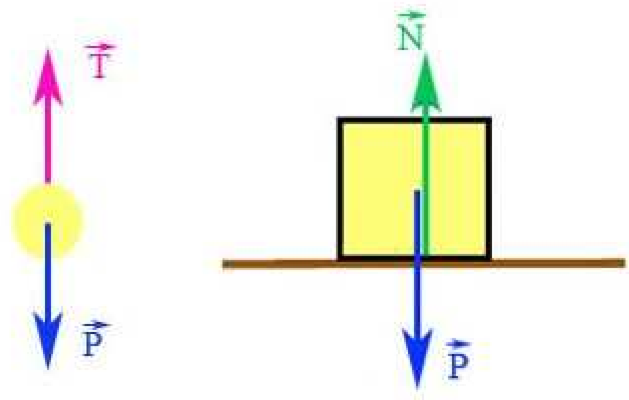
¿Qué masa tiene el cilindro metálico? Fíjate en que el dinamómetro marca entre 1,44 y 1,48 N. La medida puede ser de 1,47 N, por lo que la masa, sustituyendo en P=mg (1,48 N = m 9,8 N/kg) será de 0,151 kg, es decir, de 151 g.

El peso de los cuerpos

Una masa de un kilogramo colgada de un dinamómetro tiene un peso de 9,8 N (que se suele aproximar a 10 N).

1.2 Equilibrio de fuerzas

Cuando sobre un cuerpo actúan varias fuerzas y la resultante de todas ellas es nula, el cuerpo se encuentra en **equilibrio de traslación**, lo que significa que **no cambia su estado de movimiento**. Es decir, si estaba en reposo, continúa en reposo, y si se estaba moviendo, continúa haciéndolo de la misma forma, manteniendo su velocidad.



Observa los dos diagramas. En el de la izquierda se representan las fuerzas que actúan sobre un objeto colgado de una cuerda: el **peso P** realizado por la Tierra, y la **tensión T** de la cuerda que lo sostiene. La resultante es nula, por lo que el cuerpo permanece indefinidamente en reposo mientras la situación se mantenga.

A la derecha se representan las fuerzas que actúan sobre un bloque apoyado en una superficie horizontal: su **peso** y la fuerza que realiza el plano sobre él y que lo sostiene, llamada habitualmente **normal** (en geometría, normal significa perpendicular). También se encuentra en equilibrio de traslación: cuanto mayor es el peso, más grande es la normal, y ambas son de magnitudes iguales pero de sentido contrario. Eso sí, puede suceder que cuando el peso sea excesivo la superficie no pueda soportarlo y se rompa, con lo que la normal no existe, actúa solamente el peso y el cuerpo cae.

Equilibrio en cuerpos apoyados o colgados

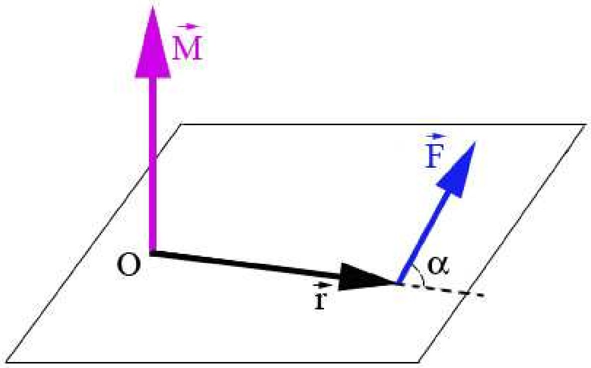
Como se mantienen con velocidad constante (en reposo) no hay aceleración. Y como sobre ellos actúa el peso, tiene que haber necesariamente otra fuerza de igual intensidad y dirección pero sentido contrario para que su resultante con el peso sea nula: la normal, reacción de la superficie de apoyo, o la tensión de la cuerda que sostiene al objeto.

1.3 Momento de una fuerza

Los cuerpos que has considerado hasta ahora podías suponerlos como puntuales. Es decir, las fuerzas que actuaban sobre ellos tenían un punto de aplicación común. Sin embargo, los cuerpos son extensos y, en algunos casos, deberás tener en cuenta el punto de aplicación de cada fuerza que actúe sobre el cuerpo.

Si aplicas una fuerza sobre un cuerpo y lo haces girar, para describir este efecto se utiliza una magnitud llamada **momento de la fuerza**.

El momento $\vec{M}$ de una fuerza $\vec{F}$ respecto de un punto O es un vector de módulo, $M = F\, r\, sen\,\alpha$ siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$.



La dirección del vector $\vec{M}$ es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{F}$ y $\vec{r}$ y su sentido es positivo si el giro que produce es contrario al de las agujas del reloj y negativo si el giro se produce en el mismo sentido de las agujas del reloj.

En el caso de una puerta, el efecto de giro depende de la fuerza con la que tiramos de ella y de la distancia desde el punto en que tiramos hasta el eje de la puerta, donde están las bisagras. Además, también depende del ángulo de giro entre la fuerza y el vector de posición, y es máximo cuando son perpendiculares (el ángulo es de 90º y su seno es 1).

Fíjate en el simulador: el peso del portapesas por un lado y el dinamómetro por otro producen efectos de giro contrarios. Observa que el producto de lo que marca el dinamómetro por la distancia al tornillo de fijación de la regla es igual al peso de las pesas por su distancia al mismo punto.

Se cumple, por tanto, que **ΣM=0**, donde **M=Fd**, teniendo en cuenta el signo del momento de cada fuerza según sea el efecto de giro que produce.

Por ejemplo, ve desplazando la pesa con una carga de 200 g desde la posición 0 a la posición 10 y comprueba que el sumatorio de los momentos es cero: las pesas hacen girar la barra en el sentido de las agujas del reloj y el dinamómetro al revés.

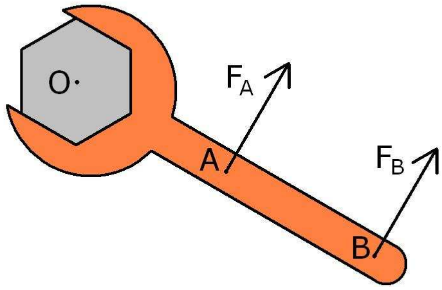
Observa el valor que marca el dinamómetro cuando está en la posición 10: indica 2 N. ¡Justamente el peso de las dos pesas! Se debe a que estar ahí equivale a estar colgando del dinamómetro, que entonces marca su peso.

Puedes comprobar los resultados añadiendo una o dos pesas más.

En equilibrio de rotación

Para que el efecto de giro sea nulo y haya equilibrio de rotación, el momento total debe ser cero: **ΣM=0**, donde **M=Fd**, teniendo en cuenta el signo del momento de cada fuerza según sea el efecto de giro que produce.

Se trata ahora de que **reflexiones** y **resuelvas situaciones** interesantes relacionadas con el **equilibrio de rotación**.



Para ello, solamente has de tener en cuenta que el efecto de giro depende de la fuerza realizada y de su distancia al eje de giro. Si actúan varias fuerzas, deberás asignar como positivo el efecto producido por una de ellas, de forma que serán positivos todos los que hagan girar al objeto de la misma forma, y negativos los que hagan girar al revés.

Fíjate en la llave inglesa de la imagen. Si se aplican fuerzas iguales en los puntos A y B, ¿en qué caso se producirá un efecto de giro mayor? En consecuencia, ¿interesa utilizar llaves inglesas de mango largo o corto?

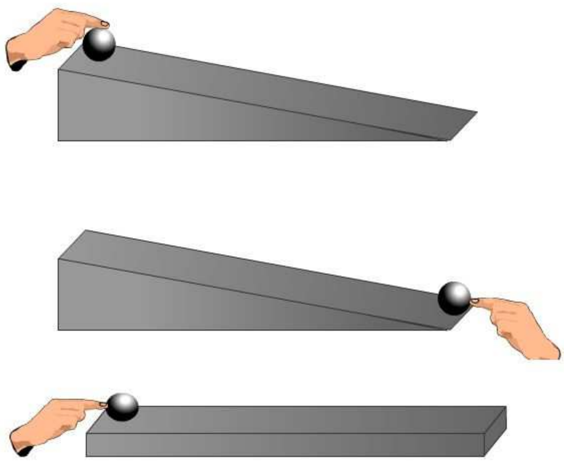
Como el efecto de giro lo mide el momento de la fuerza, que es el producto de su módulo (magnitud) por la distancia al punto de giro, la fuerza aplicada en B producirá un giro mayor, y, por tanto, convendrá **tener llaves inglesas de mango largo**.

2. Leyes de la Dinámica

La experiencia de Galileo y la inercia

Galileo experimentó con planos inclinados, haciendo rodar bolas por superficies planas inclinadas distintos ángulos con la horizontal. La conclusión a la que llegó es que como las bolas bajaban cada vez más rápidas y subían perdiendo rapidez, al rodar en un plano horizontal lo harían con rapidez constante.

Galileo construyó dos planos inclinados y los colocó en ángulos opuestos. Desde lo alto del primero de los planos soltó una bola que bajó rodando. Al llegar al segundo plano la bola subió por él hasta cierta altura. Galileo observó que la bola trataba de alcanzar la altura inicial.



Galileo repitió la experiencia reduciendo el ángulo del segundo plano y encontró que la bola subía siempre hasta la misma altura, aunque recorría una distancia mayor. Se preguntó ¿qué pasaría si el segundo plano fuera horizontal? Y llego a la conclusión de que la bola seguiría rodando sobre la superficie para siempre.

Si se quiere mantener un cuerpo en movimiento, se debe seguir empujando debido al rozamiento y no a la naturaleza del proceso. Galileo afirmó que **los cuerpos tienden a permanecer en su estado de movimiento** y que, por consiguiente, oponen una resistencia a un cambio en su estado de movimiento.

Si la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es nula, permanecerá en el estado de movimiento que tenga: en reposo, con velocidad nula, o manteniendo constante la velocidad que lleve.

Solamente has de tener en cuenta que uno de los efectos de las fuerzas es producir cambios de velocidad, por lo que si no actúan fuerzas netas no se producen esos cambios.

Se suele hablar de **la inercia como la tendencia que tienen los cuerpos a mantener su estado de movimiento**: permanecer en reposo si están quietos, o seguir moviéndose con la velocidad que llevan.

En este video puedes observar como un chico subido a un monopatín cumple la primera ley de Newton en dos casos diferentes.

En la primera situación, la fuerza se ejerce sobre el monopatín poniéndolo en movimiento, sin embargo el chico tiende a permanecer parado, tal y como estaba, ya que la fuerza no se está ejerciendo sobre él.

En la segunda situación el chico se está moviendo subido en el monopatín, que al chocar con la colchoneta se para. Sin embargo el chico sigue moviéndose ya que sobre él la colchoneta no ha ejercido ninguna fuerza. Los puntos rojos marcan su movimiento, que será el mismo que tenía cuando estaba moviéndose antes de chocar.

Primera ley de Newton o ley de inercia

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, este llevará el mismo movimiento que llevaba inicialmente (o bien se moverá en línea recta con velocidad constante o bien permanecerá en reposo).

La masa y la inercia

La masa es una medida de la inercia, es decir de la resistencia de un cuerpo a que lo pongan en movimiento, lo detengan o en general cambien su movimiento.

Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

Para determinar el estado de movimiento de un cuerpo se necesita un sistema de referencia, de forma que el estado de movimiento depende del sistema de referencia elegido.

Cuando viajas en un tren sentado en tu asiento estás en reposo con relación al vagón, pero te mueves con la velocidad del tren respecto de un poste de la catenaria.

En los dos sistemas de referencia se cumple la primera ley de Newton. Los sistemas de referencia en los que se cumple la ley de la inercia se denominan **sistemas de referencia inerciales**.

Un sistema de referencia es inercial cuando está en reposo o se mueve con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme).

Si subes al autobús urbano, cuando arranca parece que te empujan hacia atrás y cuando frena parece que te empujan hacia delante.

En los casos anteriores observarás que al utilizar como sistema de referencia el autobús urbano, al arrancar y al frenar, aunque nadie te empuja, te vas hacia atrás o hacia adelante, no se cumple la primera ley de Newton. El sistema de referencia es acelerado y se denomina no inercial.

Para un observador situado en el autobús, es como si una fuerza te empujase. Esta fuerza no es real ya que no es consecuencia de una interacción, es una fuerza ficticia que se denomina **fuerza de inercia.**

2.1 Ley fundamental

Las fuerzas producen aceleración en los objetos. Si el movimiento es rectilíneo, el efecto es un cambio del módulo de la velocidad: el objeto se mueve más deprisa (acelera) o más despacio (decelera).

La aceleración producida es directamente proporcional a la fuerza total aplicada, e inversamente proporcional a la masa del objeto. Se suele expresar como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Es importante que te des cuenta de que **F se trata de la fuerza total aplicada, de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto**.

Como este curso solamente trabajas con fuerzas que actúan en la misma dirección, no es necesario utilizar el carácter vectorial de las fuerzas, sino solamente su sentido para saber el signo de la aceleración, positiva o negativa, por lo que la expresión se reduce a **ΣF=ma**.

Segunda ley de la dinámica

La aceleración producida en un objeto es directamente proporcional a la fuerza total aplicada, e inversamente proporcional a la masa del objeto.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

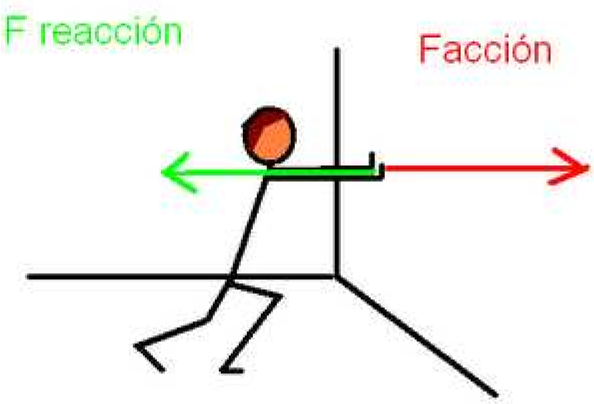
2.2 Principio de acción y reacción

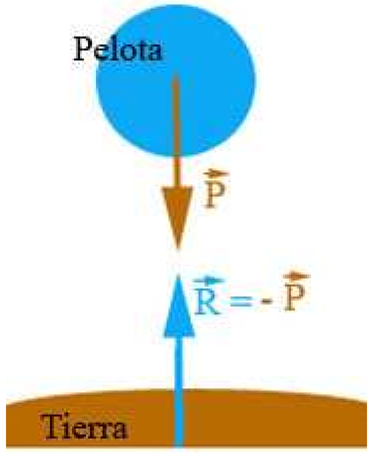
Cuando golpeas una mesa con el puño o la palma de la mano, sientes dolor. ¡Pero eres tú quien ha dado el golpe a la mesa! ¿Por qué te duele la mano? Además, el dolor será más intenso cuanto mayor sea la intensidad del golpe que hayas dado.

Para saber la razón debes tener en cuenta el tercer principio de la dinámica: **cuando un cuerpo A realiza una fuerza sobre un cuerpo B, éste cuerpo B aplica sobre A una fuerza de la misma intensidad y dirección, pero de sentido contrario**. Se trata de **dos fuerzas**, llamadas **de acción y de reacción**, que **no se anulan porque se aplican sobre cuerpos diferentes**.

Es decir, ¡es la mesa la que te devuelve el golpe!

En la imagen puedes ver lo que sucede cuando empujas la pared: ¡también te devuelve una fuerza de reacción que responde a la que tú estás aplicando!





El peso de los cuerpos también interviene en un par de fuerzas de acción y reacción. Como puedes ver en la imagen, la Tierra atrae a la pelota con una fuerza que llamamos el peso de la pelota (P), pero, a su vez, la pelota atrae a la Tierra con una fuerza que en el diagrama se indica como R.

Como actúa una fuerza neta sobre la pelota, le provoca una aceleración, que ya sabes que es la aceleración de la gravedad, g (9,81 ms^{-2}). Sin embargo, como la masa de la Tierra es comparativamente enorme, la aceleración que le provoca la fuerza R de reacción es extraordinariamente pequeña y se puede despreciar con toda tranquilidad.

Tercera ley de Newton: acción y reacción

Cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro B, éste ejerce una fuerza sobre el primero de la misma intensidad y dirección pero de sentido opuesto ($\mathbf{F_{AB} = - F_{BA}}$).

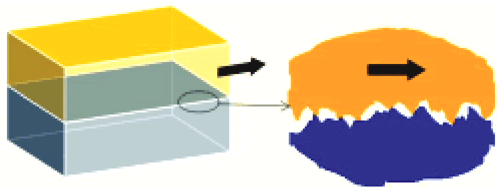
2.3 Fuerzas de rozamiento

¿Por qué hay rozamiento?

Cuando lanzas un objeto por una superficie horizontal, lo que observas es que cada vez su velocidad es menor, hasta que llega a detenerse.

Por tanto, lleva una aceleración negativa, contraria al sentido del movimiento, lo que hace que su velocidad disminuya hasta anularse, y el móvil se para.

Si las caras del objeto están pulimentadas y la superficie sobre la que se desliza también (¡la pastilla de hockey en la pista de hielo!) se mueve durante mucho más tiempo y recorre más espacio hasta pararse.



¿Qué fuerza produce esa aceleración de frenado? Se llama **fuerza de rozamiento**, se opone al movimiento y se debe a la rugosidad de las dos superficies, que provoca que el deslizamiento de una sobre otra quede dificultado.

En las tres simulaciones siguientes puedes observar la diferencia entre dos superficies con mucho rozamiento, con poco rozamiento y sin rozamiento.

La fuerza de rozamiento

Por fuerza de rozamiento se entiende toda fuerza que se opone al movimiento de un objeto debido a las interacciones entre las superficies de contacto y/o el medio en el que se desplaza.

Características de las fuerzas de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento actúan siempre en sentido contrario al de la velocidad con que se mueve el objeto, pero esto no quiere decir que un cuerpo en reposo no las sufran, sino que no se manifiestan hasta que alguna fuerza provoque el movimiento.

Al realizar un estudio experimental de una fuerza de rozamiento, se encuentran las siguientes características:

- Toda fuerza de rozamiento tiene la dirección de la superficie de contacto y sentido contrario al movimiento.
- El valor de su módulo toma valores desde cero hasta un valor máximo, que coincide con la fuerza mínima para iniciar el movimiento.
- Una vez ha comenzado el movimiento, el valor del módulo disminuye hasta un valor determinado que permanece constante mientras el cuerpo siga moviéndose.

- La fuerza de rozamiento no depende del área de contacto entre superficies.
- La fuerza de rozamiento es perpendicular a la fuerza Normal.

De estos resultados podemos deducir la existencia de una constante de proporcionalidad entre fuerza de rozamiento y la Normal, que denominaremos **coeficiente de rozamiento** y representaremos por la letra griega μ. Además, existen dos tipos de fuerza de rozamiento:

- Fuerza de rozamiento estático, que actúa sobre los cuerpos en reposo, caracterizada por el coeficiente de rozamiento estático $\boldsymbol{\mu_{es}}$.
- Fuerza de rozamiento dinámico, que actúa sobre los cuerpos en movimiento, caracterizada por el coeficiente de rozamiento dinámico $\boldsymbol{\mu_{di}}$.

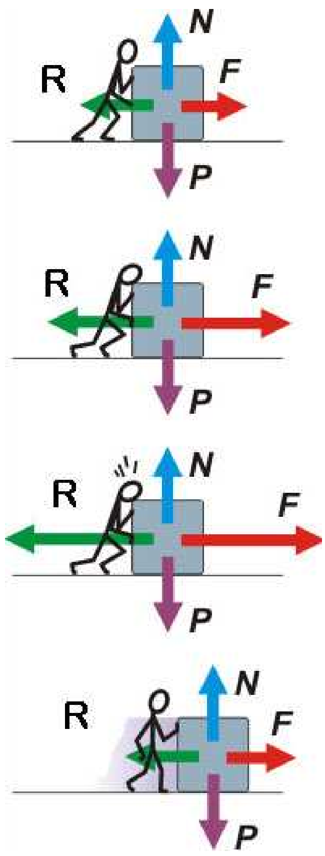
Rozamientos estático y dinámico

El valor de la la fuerza de rozamiento es:

- Fuerza de rozamiento estático: $\mathbf{F_{Res} = \mu_{es} \cdot N}$
- Fuerza de rozamiento dinámico: $\mathbf{F_{Rdi} = \mu^{di} \cdot N}$

Se cumple que para un mismo par de superficies: $\boldsymbol{\mu_{es} > \mu_{di}}$

Rozamiento estático y rozamiento dinámico



Fíjate en la imagen, en la que se representa lo que sucede cuando se empuja un bloque que se pretende poner en movimiento para trasladarlo.

En la dirección vertical actúan el peso, realizado por la Tierra, y la normal, que realiza la superficie de apoyo. Como son iguales y de sentido contrario, el objeto no experimenta cambio de velocidad vertical y sigue en contacto con la superficie.

En la primera viñeta, el hombre empuja con una fuerza F, pero el bloque no se mueve porque hay una fuerza de rozamiento R igual y de sentido contrario, por lo que la aceleración es nula y no hay cambio de velocidad.

En la segunda, empuja con una fuerza mayor, con lo que aumenta el rozamiento pero la aceleración sigue siendo nula, ya que el bloque continúa sin moverse.

En la tercera todavía son mayores la fuerza de empuje y el rozamiento, pero el bloque sigue sin moverse.

Finalmente, en la cuarta viñeta el bloque comienza a moverse. Pero en ese momento disminuye la fuerza de rozamiento, con lo que la fuerza motriz para mantener el movimiento a velocidad constante es menor.

Es decir, es más difícil poner el bloque en movimiento que mantener el movimiento una vez que ya ha comenzado: **el rozamiento estático es mayor que el dinámico**.

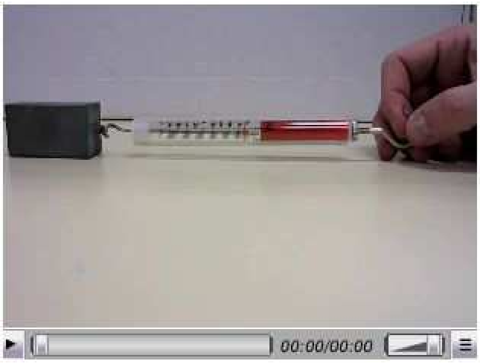
La normal y el rozamiento

Para que haya rozamiento entre dos superficies deben estar en contacto e interaccionando entre ellas. En el caso de planos horizontales, la existencia de la normal (la reacción del plano de apoyo al peso del cuerpo que está sobre él) provoca que haya rozamiento: si no hay normal (fuerza perpendicular entre las superficies en contacto), no hay rozamiento.

Dinámica del rozamiento

El principio fundamental de la dinámica se aplica teniendo en cuenta la fuerza motriz F y la fuerza de rozamiento, μmg, que se opone al movimiento. En un plano horizontal tiene la expresión:

$$\mathbf{F - \mu mg = ma}$$



El valor de la fuerza de rozamiento depende del valor de la fuerza normal que la superficie ejerce sobre el cuerpo; si la superficie es horizontal tiene una magnitud igual al peso del objeto, pero ya verás más adelante lo que sucede en planos inclinados.

Observa el vídeo siguiente: al tirar del dinamómetro el objeto se pone en movimiento cuando la fuerza con la que se tira es igual a la fuerza de rozamiento estático (de 0,8 N).

3. Momento lineal

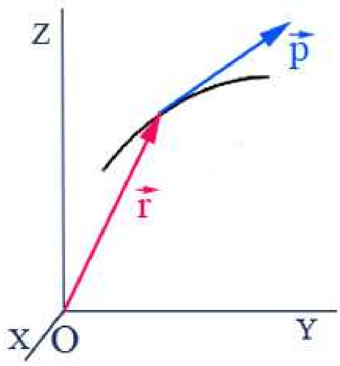
¿Por qué es más difícil detener a un camión que a una mosca si se mueven a la misma velocidad? ¿Por qué es más doloroso caer sobre una superficie de cemento que sobre una alfombra? ¿Qué ocurre cuando chocan dos bolas de billar? ¿Cómo actúa el airbag de un coche?

Al golpear una pelota con una raqueta, un palo de golf o un bate de béisbol, experimenta un cambio muy grande en su velocidad en un tiempo muy pequeño.

Todos estos hechos tienen en común la magnitud **cantidad de movimiento** o **momento lineal**. Esta magnitud combina la inercia y el movimiento, o lo que es lo mismo, la masa y la velocidad.

Habrás observado que todo cuerpo en movimiento ejerce una fuerza sobre ti cuando lo intentas detener. Cuanto mayor es la velocidad con que se mueve, más difícil es pararlo y cuanta más masa tiene, más difícil es también detenerlo. Si has jugado alguna vez a rugby habrás notado que la afirmación anterior es cierta.

Newton llamó cantidad de movimiento de un cuerpo a la magnitud que caracteriza el estado de movimiento del cuerpo. La cantidad de movimiento o momento lineal así definido es un vector de módulo m.v, dirección tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento. La unidad de cantidad de movimiento en el S.I. es el kg·m/s.



Un cuerpo puede tener una gran cantidad de movimiento si tiene una masa muy grande o si se mueve a gran velocidad.

Concepto de momento lineal o cantidad de movimiento

Se define la cantidad de movimiento o momento lineal, $\vec{p}$, de un cuerpo, como el producto de su masa por la velocidad con que se mueve, por lo que $\vec{p} = m\vec{v}$.

Impulso mecánico

En más de una ocasión habrás visto como sale acelerando "a tope" un coche en un Gran Premio de Fórmula 1. Si mantiene la acción (fuerza) durante más tiempo, adquiere mayor velocidad y puede colocarse en cabeza.

El efecto que produce una fuerza que actúa sobre un cuerpo depende del tiempo que está actuando. Para medir este efecto se define la magnitud impulso mecánico.

Concepto de impulso mecánico

El impulso mecánico se define como el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo que ésta actúa.

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

3.1 Teorema del impulso mecánico

El impulso mecánico es consecuencia de una fuerza que actúa sobre un cuerpo y que modifica su estado de movimiento, por lo que las dos magnitudes están relacionadas.

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Es decir, la variación del momento lineal o cantidad de movimiento de un cuerpo en la unidad de tiempo mide la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. Este enunciado es otra forma de expresar la segunda ley de Newton y así fue formulada por él.

La segunda ley de Newton expresada en función de la cantidad de movimiento tiene una validez más general, ya que se puede aplicar cuando la masa varía, como en el caso de un vagón de ferrocarril que recibe agua de lluvia o de un cohete que asciende.

Teorema del impulso mecánico

$$\sum \vec{F}_i \Delta t = \Delta \vec{p}$$

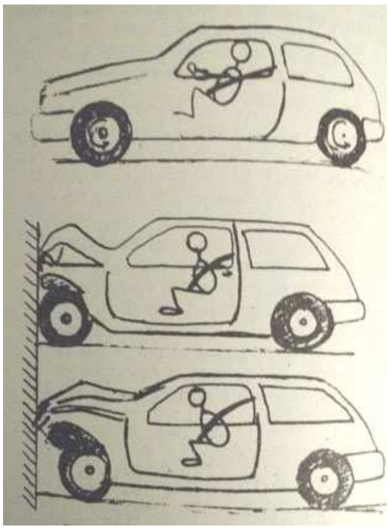
El impulso mecánico de la fuerza resultante es igual a la variación del momento lineal.

El teorema del impulso tiene una gran importancia en aplicaciones de la vida diaria.

Seguramente habrás visto que los saltadores de altura o pértiga siempre caen sobre una colchoneta. Tú mismo, al saltar desde un lugar un poco elevado, doblas las rodillas al tocar el suelo.

En estos casos se intenta que el impulso necesario para detener a la persona se obtenga en un tiempo mayor, con lo que la fuerza que deberá soportar su estructura corporal será menor y, por lo tanto, será más difícil lesionarse.

La seguridad en los automóviles



Existen dos sistemas de seguridad en el automóvil relacionados con el impulso que recibe una persona que viaja en un coche y sufre un accidente.

Mediante **los cinturones de seguridad** las personas reducen la velocidad mientras el vehículo lo hace, con lo que paran en un tiempo mayor. Esto hace que la fuerza (el impacto) sea menor y los huesos más fuertes del cuerpo puedan aguantar mientras se destruye la carrocería. Sin el cinturón la cabeza choca contra el parabrisas o la columna de dirección en un tiempo muy pequeño.

En un impacto lo suficientemente importante (un golpe contra un objeto indeformable a 18 km/h o una deceleración de 3g, o 29,4 m/s2), **los airbags** se inflan con gran rapidez por la acción del gas que se desprende en una reacción química, de manera que distribuyen la fuerza del impacto más equitativamente por todo el cuerpo, deteniendo al pasajero gradualmente.

3.2 Conservación del momento lineal

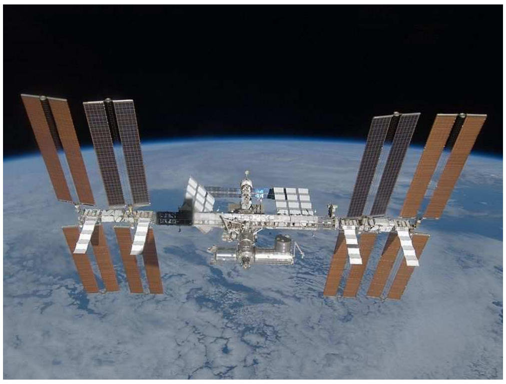
De acuerdo con el teorema del impulso mecánico,

$$\sum \vec{F}_i \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Si la fuerza total que actúa sobre un objeto es nula, no variará su cantidad de movimiento.

$$\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = cte$$

La conservación de la cantidad de movimiento de un cuerpo equivale al Principio de inercia: si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula, su momento lineal o cantidad de movimiento es constante y si la masa del cuerpo es constante, su velocidad también lo es.



$$\vec{p} = cte \Rightarrow m\vec{v} = cte \Rightarrow \vec{v} = cte$$

Si la fuerza que mantiene en órbita a la Estación Espacial Internacional desapareciera, la estación se movería con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme).

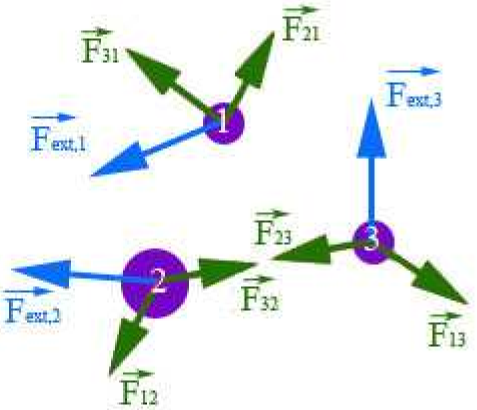
Generalización a un sistema de partículas

Un sistema de partículas es un conjunto de cuerpos o partículas del que queremos estudiar su movimiento.

La cantidad de movimiento o momento lineal de un sistema de partículas se define como la suma de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas que lo forman:

$$\vec{p} = \sum p_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n$$

Sobre las partículas de un sistema actúan dos clases de fuerzas, las fuerzas interiores y las fuerzas exteriores.



Las **fuerzas interiores** son las ejercidas entre sí por las partículas del sistema. La resultante de las fuerzas interiores de un sistema es nula, ya que al calcularla se suma cada acción con su correspondiente reacción.

Las **fuerzas exteriores** son las que actúan sobre las partículas del sistema, pero proceden de la interacción entre las partículas del sistema y otros cuerpos que no pertenecen al sistema.

La resultante de las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas es igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo.

$$\sum \vec{F} = \sum F_{\text{int}} + \sum F_{ext} = \sum F_{ext}$$

$$Si \sum F_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0}$$

Si la resultante de las fuerzas exteriores es nula, el sistema se dice aislado. Un sistema aislado es aquél que no interacciona con el exterior.

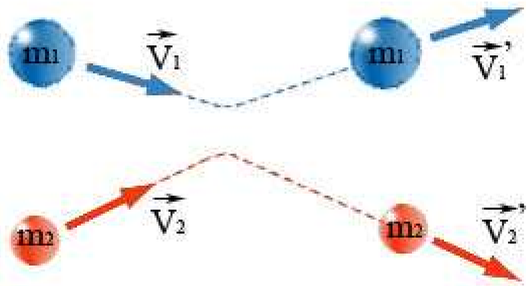
Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema de partículas es nula, la cantidad de movimiento del sistema permanece constante.

Pero aunque la cantidad de movimiento del sistema permanezca constante, puede variar la cantidad de movimiento de cada partícula del sistema.

Choques

En Física se considera un choque cualquier interacción muy intensa y de corta duración. Por ello, un choque es una interacción entre dos coches, entre dos bolas de billar y entre un arma y su proyectil, pero también una explosión en la que un cuerpo se rompe en varios trozos, como sucede en los fuegos artificiales.



Como en ausencia de fuerzas exteriores se conserva el momento lineal, para un sistema de dos partículas se puede decir que:

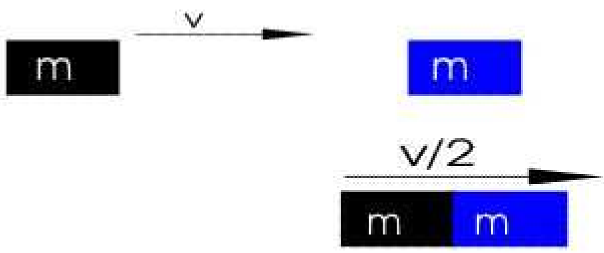
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'}$$

3.3 Tipos de choques

Choques elásticos e inelásticos

Al jugar a billar, habrás observado que cuando chocan las bolas frontalmente, si una de las bolas está en reposo, después de la colisión la que lanzas queda en reposo y la otra se mueve con una velocidad igual a la que llevaba la primera.

Si dos objetos chocan sin sufrir una deformación permanente y sin calentarse, se dice que el choque es **elástico**.
El ejemplo de las bolas de billar en el que una de las bolas transfiere su cantidad de movimiento a la otra es un caso de choque elástico, y también el que puedes ver en la primera simulación. Se da cuando las bolas tienen la misma masa.



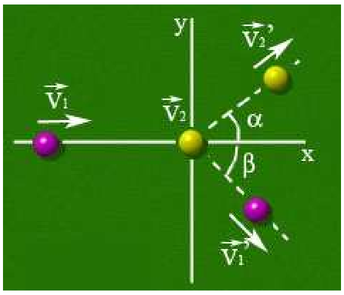
Cuando dos objetos chocan y tras la colisión quedan unidos, el choque se denomina **totalmente inelástico**.

Choques en dos dimensiones

En la vida diaria los choques no siempre se producen en una dirección, sino que es necesario considerar dos o tres direcciones.

Para resolver la situación que se te puede plantear, debes recordar que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y que se representa mediante un vector.

La conservación de la cantidad de movimiento se expresa mediante una ecuación vectorial y para resolverla tendrás que formular una ecuación para cada eje. En un choque en el plano dos ecuaciones, una para la componente X y otra para la componente Y.



En el choque de la figura será:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'}$$

y las ecuaciones en los ejes quedarán:

$$Eje\ X: m_1 v_1 = m_2 v_2^{'} \cos\alpha + m_1 v_1^{'} \cos\beta$$

$$Eje\ Y: 0 = m_2 v_2^{'} cen\alpha + m_1 v_1^{'} sen\beta$$

4. Sistemas con un cuerpo

El caso más sencillo de estudio dentro de la dinámica es aquél en el que únicamente existe un cuerpo cuyo movimiento quiere estudiarse. Este tipo de problemas es fundamental, pues su método de resolución es similar al aplicado en problemas más complicados y, por lo tanto, si eres capaz de resolver un problema de un único cuerpo, te resultará evidente la forma de tratar problemas de varios cuerpos.

Con ese fin, conviene comenzar con las pautas que debes aplicar en la resolución de situaciones con sistemas dinámicos.

Para trabajar con un único cuerpo

Cuando tengas que resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

- Identifica las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo, así como su origen, tipo y dirección.
- Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
- Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del cuerpo. La componente perpendicular al plano de movimiento se denomina **Normal** mientras que la paralela al mismo es la componente **Tangencial**.
- Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
- Aplica la segunda ley de Newton en cada uno de los ejes.

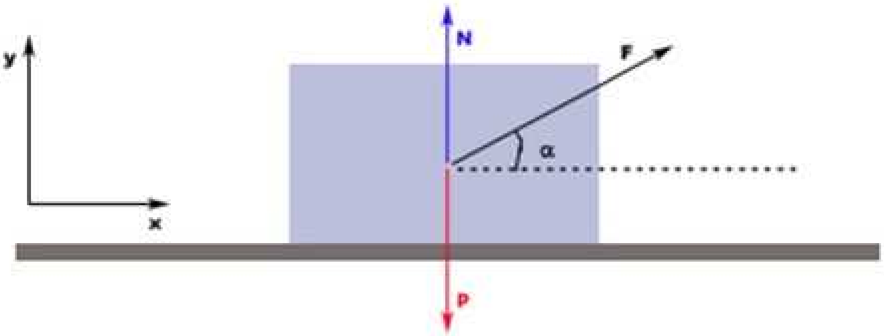
4.1 Plano horizontal

El caso más simple de sistema dinámico que podemos encontrar es aquél en el que un cuerpo se mueve sobre un plano horizontal con una fuerza F actuando sobre él. Además de dicha fuerza, en un problema de este tipo siempre actuarán dos fuerzas más:

- El peso (P), que en este tema representaremos preferiblemente por su valor m·g. Siempre tendrá dirección vertical y hacia abajo.
- La normal (N), correspondiente a la fuerza de reacción de la superficie sobre la que se apoya el cuerpo. En este caso su dirección será, como su nombre indica, perpendicular a la superficie. En el caso de un plano horizontal siempre será vertical y hacia arriba.

Una vez identificadas las fuerzas, escogemos el sistema de referencia, que según se señaló deberá corresponder con la dirección del movimiento, en este caso horizontal-vertical.

El esquema general correspondiente a este tipo de movimiento se muestra a continuación:

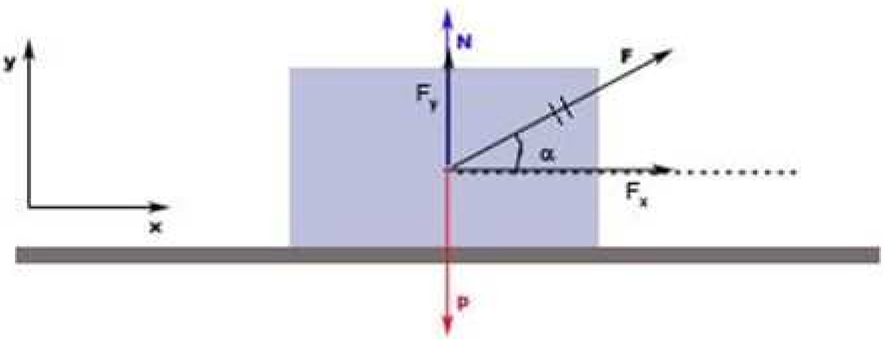


El siguiente paso es descomponer aquellas fuerzas cuya dirección no coincida con alguno de los ejes coordenados en sus componentes cartesianas. En este caso, la única fuerza que no coincide es la fuerza F, por lo que procedemos a descomponerla en sus componentes F_x y F_y.

$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\,sen\alpha$$

El nuevo esquema con las fuerzas descompuestas en sus ejes quedaría como sigue:



Ya sólo queda escribir las ecuaciones del movimiento en cada uno de los ejes, teniendo en cuenta que en el eje y el cuerpo no presentará aceleración por encontrarse sobre un plano. Según esto, las ecuaciones serían:

$$F\cos\alpha = ma_x$$

$$F\,sen + N - mg = 0$$

El oscilador armónico lineal

Un cuerpo unido a un muelle que oscila con movimiento periódico (cada tiempos iguales pasa por las mismas posiciones) se dice que es un oscilador armónico lineal, y también que lleva movimiento vibratorio armónico simple (MAS).

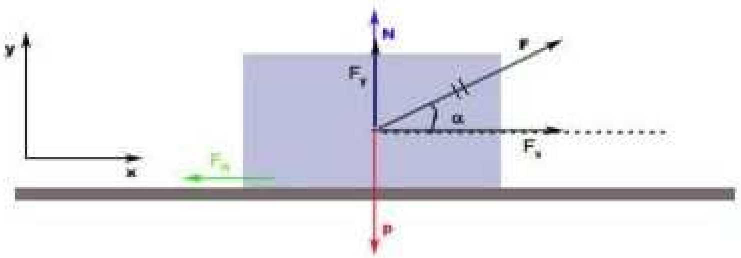
¿Con qué frecuencia oscila el cuerpo? Siendo k la constante del muelle y m la masa del cuerpo que oscila, se puede demostrar que la frecuencia de oscilación f es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esta ecuación es interesante porque relaciona una magnitud característica de la descripción del movimiento periódico con dos magnitudes mecánicas del oscilador, como son la masa que oscila y la constante recuperadora del muelle.

4.2 Plano horizontal con rozamiento

Ahora vas a estudiar un caso un poco más complicado del problema anterior; en él añadirás la existencia de una fuerza de rozamiento, caracterizada como ya has visto por un coeficiente de rozamiento μ. La diferencia consiste en la presencia de una nueva fuerza de rozamiento F_R en sentido contrario al movimiento, según se indica en el siguiente esquema:



La única consideración que debe hacerse es que su valor depende directamente del de la fuerza Normal, por lo que se produce una interdependencia entre las ecuaciones de los distintos ejes. Así pues, para resolver los problemas de rozamiento será necesario realizar los cálculos para ambos ejes.

Fíjate en cómo quedan las ecuaciones para este caso general de movimiento horizontal con rozamiento:

$$F\cos\alpha - F_R = ma_x$$

$$F\,sen\alpha + N - mg = 0$$

Teniendo en cuenta que el valor de la fuerza de rozamiento es $F_R = \mu \cdot N$, puede escribirse:

$$F\cos\alpha - \mu N = ma_x$$

$$F\,sen\alpha + N - mg = 0$$

Con este sistema de ecuaciones puedes resolver cualquier problema de movimiento horizontal, añadiendo más fuerzas si fuera necesario, asegurándote de incluirlas con su dirección y signo correctos.

¿Qué coeficiente de rozamiento se utiliza?

En los problemas con rozamiento debes recordar siempre que existen dos tipos de coeficiente de rozamiento (μ), y utilizar uno u otro en función del caso que tengas que resolver:

- Si el cuerpo no ha comenzado a moverse o quieres calcular en qué momento comienza a hacerlo utilizarás el coeficiente de rozamiento estático (μ_{es}).
- Si el cuerpo ya se encuentra en movimiento, utilizarás el coeficiente de rozamiento dinámico (μ_{di}).

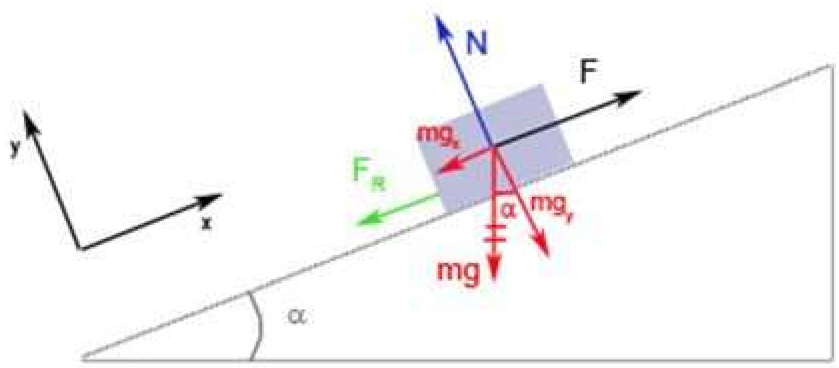
4.3 Plano inclinado

La mayor parte de los movimientos no tienen lugar en un plano horizontal, sino que presentan un cierto desnivel. La modelización de este tipo de casos, típicos en el estudio de la dinámica, es el movimiento sobre un plano inclinado.

Estudiaremos el caso general, con rozamiento y acción de una fuerza paralela al plano. Los casos más simples pueden obtenerse sin más que sustituir los datos suministrados en las ecuaciones.

En este problema es fundamental escoger adecuadamente los ejes de referencia, que se tomarán en la dirección del movimiento y su perpendicular, esto es, con el eje x paralelo a la superficie del plano inclinado.

Comenzaremos con el diagrama de fuerzas que actúan sobre un cuerpo en un plano inclinado, donde ya se ha descompuesto la única fuerza cuya dirección no coincide con ninguno de los ejes, el peso. Debes tener en cuenta a la hora de calcular su valor que el ángulo que forma respecto al eje y es el mismo que el ángulo del plano (α) por tratarse de ángulos alternos-internos.



El valor de los componentes de la fuerza peso en cada uno de los ejes es, en este caso:

$$mg_x = mg\,sen\alpha$$

$$mg_y = mg\cos\alpha$$

Y las ecuaciones correspondientes resultan ser:

$$F - mg\,sen\alpha - F_R = ma_x$$
$$N - mg\cos\alpha = 0$$

Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor como producto del coeficiente de rozamiento por la normal, se obtiene:

$$F - mg\,sen\alpha - \mu N = ma_x$$
$$N = mg\cos\alpha$$

Para calcular el valor mínimo de rozamiento para que un objeto no deslice por un plano inclinado cuando no actúa sobre él ninguna fuerza basta con igualar a cero tanto la fuerza como la aceleración en el conjunto de ecuaciones anterior, utilizando el coeficiente de rozamiento estático μ_{es} y considerar que el cuerpo permanecerá en reposo mientras la componente en el eje x del peso sea menor que el valor máximo de la fuerza de rozamiento:

$$mg\,sen\alpha - \mu_{es} mg\cos\alpha \leq 0 \Rightarrow mg\,sen\alpha \leq \mu_{es} mg\cos\alpha$$
$$sen\alpha \leq \mu_{es}\cos\alpha \Rightarrow \mu_{es} \geq \tan\alpha$$

Otro caso de particular interés es el cálculo de la aceleración con que desliza un objeto en un plano inclinado cuando sobre él no actúa ninguna fuerza (F=0), teniendo en cuenta que ahora el cuerpo descenderá por el plano, por lo que deberemos cambiar el sentido del eje x, siendo ahora positiva la componente del peso y negativa la fuerza de rozamiento. Además, por existir movimiento, el coeficiente de rozamiento a utilizar será el dinámico μ_{di} :

$$mg\,sen\alpha - \mu_{di} mg\cos\alpha = ma_x \Rightarrow a_x = g\,sen\alpha - \mu_{di} g\cos\alpha$$
$$a_x = g\,(sen\alpha - \mu_{di}\cos\alpha)$$

En el plano inclinado sin fuerzas externas

Las ecuaciones del plano inclinado se simplifican mucho en el caso de que no exista ninguna fuerza externa actuando sobre el sistema. Entre las situaciones más comunes cabe destacar, por su simplicidad:

- Aceleración de un cuerpo en ausencia de rozamiento(μ=0): **a_x = g·sen α**
- Aceleración de un cuerpo con rozamiento: **a_x = g·(sen α - μ_{di}·cos α)**
- Valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que un cuerpo no deslice por el plano: **μ_{es} > tan α**

Si existe alguna fuerza externa es necesario utilizar el conjunto de ecuaciones, ya que no es posible realizar las simplificaciones que dan lugar a estos resultados.

5. Sistemas con dos cuerpos

Hasta ahora se han tratado casos de sistemas dinámicos simples en los que existía un único cuerpo, pero ésta no es la situación más común que podemos encontrarnos. Es interesante considerar el caso de sistemas formados por dos cuerpos que interaccionan porque uno empuja a otro aun sin tener ninguna ligadura fija que los una.

Pero la mayor parte de dispositivos y máquinas que podemos observar a nuestro alrededor están formadas por distintas partes interrelacionadas entre sí, de tal forma que algún fallo o problema en cualquiera de ellas lleva asociado que el sistema en su conjunto deje de funcionar. Estos sistemas dinámicos formados por más de un cuerpo, son más complejos de estudiar que los sistemas de un único cuerpo, no tanto por el número de cuerpos a tratar (pues es posible, y de hecho así se hace, el estudio de cada uno de ellos por separado), sino por la necesidad de encontrar y establecer las relaciones entre todos ellos para predecir su movimiento.

Un caso particularmente clarificador es el del conjunto vehículo-remolque, en el cual la fuerza tractora del vehículo debe transmitirse de alguna forma al remolque: esto se consigue mediante el uso de un cable, cuerda o cadena que transmita la fuerza de un cuerpo al otro.

Si se observa detenidamente este dispositivo intermedio de transmisión de la fuerza, vemos que se **tensa** en el momento de la transmisión; por ello, en términos físicos hablaremos de **fuerzas de tensión**.

¿Qué son las fuerzas de tensión?

Se llama **tensión** a la fuerza de interacción ejercida entre dos cuerpos cuando uno de ellos transmite un movimiento a otro mediante un dispositivo material. Esta tensión se representará por **T** y se trata de una fuerza de acción-reacción sobre el intermediario, normalmente una cuerda o cable.

Para simplificar el estudio, las cuerdas y cables utilizados se consideran "ideales", con las siguientes características:

- No tendrán masa (luego no habrá fuerza peso).
- Serán inextensibles (y por lo tanto no almacenarán energía elástica en su interior y las distancias serán constantes).
- No se romperán (serán capaces de soportar cualquier tensión).

Evidentemente, esto no es así en la vida real, pero supone una simplificación aceptable en cuanto permite el estudio de los cuerpos enlazados con unas ecuaciones mucho más sencillas, ya que con estas condiciones podemos afirmar que las tensiones son iguales en los extremos. ¿Por qué?

La ecuación correspondiente a la cuerda es T - T' = m·a, pero dado que la cuerda no tiene masa (m = 0), entonces T = T' y por tanto las tensiones son exactamente iguales.

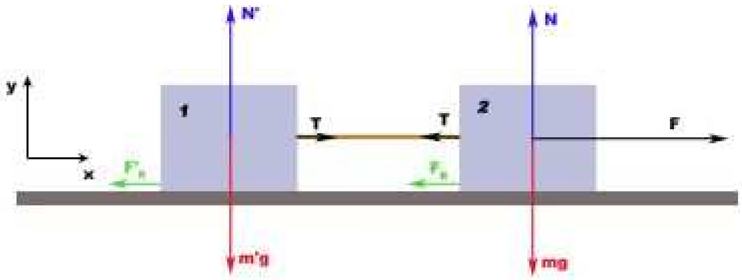
El movimiento de los cuerpos enlazados

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además, las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

5.1 Plano horizontal

El ejemplo más sencillo de cuerpos enlazados es el conjunto vehículo-remolque. Esta situación se presenta en situaciones como en un tren, entre la locomotora y los vagones que arrastra, o en un coche que remolca una caravana.

Esquemáticamente, el diagrama de fuerzas para un problema de dos cuerpos enlazados en movimiento en un plano horizontal con rozamiento es como se indica en la figura:



Al igual que se hizo en el caso de sistemas con un cuerpo, resulta conveniente señalar algunas pautas adicionales de utilidad a la hora de tratar con sistemas de cuerpos enlazados, como extensión de lo indicado para un único cuerpo.

Para trabajar con cuerpos enlazados

A la hora de resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica en un sistema de cuerpos enlazados, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

- Identifica los distintos cuerpos que intervienen en el problema (recuerda que las cuerdas no son cuerpos como tales, sino simplemente el medio transmisor de la fuerza de tensión)
- Identifica las fuerzas que se ejercen sobre cada cuerpo, así como su origen, tipo y dirección. Ten en cuenta que la tensión es una fuerza de acción y reacción aplicada en ambos extremos de la cuerda con sentido contrario en cada cuerpo.
- Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
- Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del conjunto. Este sistema de referencia debe ser el mismo para todos los cuerpos intervinientes.
- Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
- Aplica la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos por separado y en cada uno de los ejes.

Según esto, y a la vista del diagrama de fuerzas para el sistema enlazado anterior, se puede escribir las ecuaciones del movimiento para cada uno de los cuerpos:

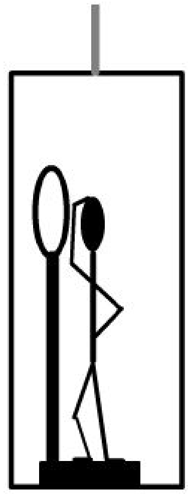
$$Cuerpo1:\ T - F_R^{'} = m^{'}a^{'} \qquad N^{'} - m^{'}g = 0$$
$$Cuerpo2:\ F - T - F_R = ma \qquad N - mg = 0$$

Una vez escritas las ecuaciones, debes tener en cuenta que, dadas las consideraciones realizadas en cuanto a la naturaleza de la cuerda, las aceleraciones de ambos cuerpos deberán ser las mismas (a = a'), al igual que el valor de T. Si sustituyes el valor de la fuerza de rozamiento llegas a las ecuaciones desarrolladas:

$$Cuerpo1:\ T - \mu m^{'}g = m^{'}a \qquad N^{'} = m^{'}g$$
$$Cuerpo2:\ F - T - \mu mg = ma \qquad N = mg$$

5.2 Plano vertical

El problema del ascensor



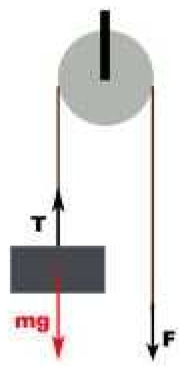
Imagina que estás en un ascensor encima de una báscula. Obviamente, cuando el ascensor está en reposo, lo que marca la báscula es tu peso. En realidad, tú haces sobre la báscula una fuerza igual a tu peso (P), que ella te devuelve por reacción (N, normal, que es lo que marca la báscula), por lo que la resultante que actúa sobre ti es nula.

Pero ¿qué sucederá cuando el ascensor sube o baja con velocidad constante? ¿Y con aceleración constante? ¿Qué marcará la báscula en cada caso? Para saberlo, utiliza el simulador siguiente.

En resumen, puedes utilizar la ecuación siguiente, que sirve para todos los casos, teniendo en cuenta, como siempre, signo positivo hacia arriba:

$$N = m(g \pm a)$$

La máquina de Atwood



Dentro del conjunto de sistemas dinámicos formados por cuerpos enlazados, otro caso de particular interés es el de una máquina simple: la polea, que nos permite elevar un cuerpo más fácilmente al poder aplicar la fuerza hacia abajo.

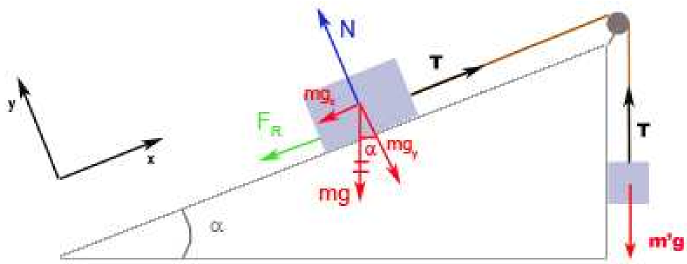
La polea más sencilla es la polea simple, que transmite directamente la fuerza realizada sobre la cuerda hasta el cuerpo, tal y como se indica en el diagrama adjunto. Resulta evidente que, en este caso **T = F** .

Realmente, éste es un caso de un único cuerpo, pero existe una variante de la polea simple que resulta ser el caso más simple de cuerpos enlazados en movimiento vertical. Es la conocida como **máquina de Atwood**, y se trata básicamente de una polea simple en la que en el otro extremo de la cuerda se ubica otro cuerpo.

De nuevo la cuerda no tiene masa, es inextensible y no existe rozamiento de ningún tipo entre la polea y la cuerda.

5.3 Plano inclinado

Una vez vistos los ejemplos generales de cuerpos enlazados en una dimensión, es momento de ver el caso de dos cuerpos enlazados en un plano inclinado. Este problema no exige ningún conocimiento especial distinto de los que ya se han estudiado; únicamente presenta una mayor dificultad en el sentido de que algunas fuerzas no actúan en las direcciones de los ejes elegidos, y exige aplicar lo aprendido tanto en el estudio de los planos inclinados como en el de la dinámica de cuerpos enlazados.



Pero vas a resolver un caso algo más simple, en el que una de las paredes es perpendicular al suelo. El esquema de fuerzas será similar el que puedes ver en la imagen

En esta ocasión los ángulos serán α = 30º, β = 90º.

En primer lugar se escriben las ecuaciones correspondientes a cada uno de los cuerpos; para el cuerpo situado en el plano inclinado, éstas serán las generales del plano inclinado que ya se calcularon sin más que sustituir F por la tensión T, resultando:

$$T - mg\,sen\alpha - \mu N = ma$$

$$N = mg\cos\alpha$$

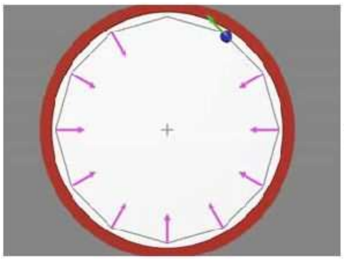
Para el segundo cuerpo, las ecuaciones son mucho más simples por tratarse de un sistema en una única dirección. Lo único que debe tenerse en cuenta es que, como se ha tomado como sentido positivo en el primer cuerpo el de la tensión, en el segundo cuerpo el sentido positivo será aquel en el que la aceleración es hacia abajo, ya que según hemos visto deberán ser iguales. Por todo ello las ecuaciones quedarán:

$$m'g - T = m'a$$

en la que hay que recordar que tanto la tensión (T) como la aceleración (a) son iguales para ambos cuerpos.

6. Trayectorias no rectilíneas

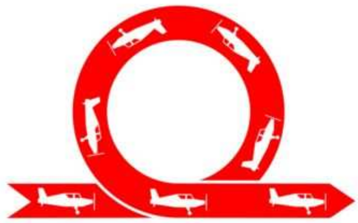
Ya sabes que si un móvil no sigue una trayectoria rectilínea, va cambiando la dirección de su vector velocidad, por lo que hay aceleración. Recibe el nombre de **aceleración centrípeta**, y se calcula como v^2/R, siendo v la velocidad del móvil en cada instante y R el radio de curvatura de la trayectoria. Su dirección va precisamente hacia el centro de la trayectoria.



En el vídeo de la izquierda se indica en color verde el vector velocidad de una bola azul que rebota en la parte interior de una pared circular, realizando una trayectoria cerrada. En cada rebote, cambia la dirección de ese vector, y se representa en magenta el vector aceleración, diferencia entre los vectores velocidad después y antes del choque con la pared. En cada giro aumenta el número de rebotes, con lo que la trayectoria se va aproximando a la circunferencia. Como puedes ver, el vector aceleración está dirigido hacia el centro de la circunferencia.

En el vídeo de la derecha puedes ver un modelo del clásico "looping" que está presente en las montañas rusas y también en los vuelos acrobáticos.

También conoces las características del movimiento circular uniforme, calculando la velocidad de giro, relacionándola con la lineal y teniendo en cuenta además las características periódicas de ese tipo de movimiento.



Ahora vas a analizar una serie de movimientos en los que toda la trayectoria o bien solamente una parte, que es la que nos interesa, es una circunferencia: perfecta en el caso de la noria y aproximada en el del avión haciendo un looping o rizo.

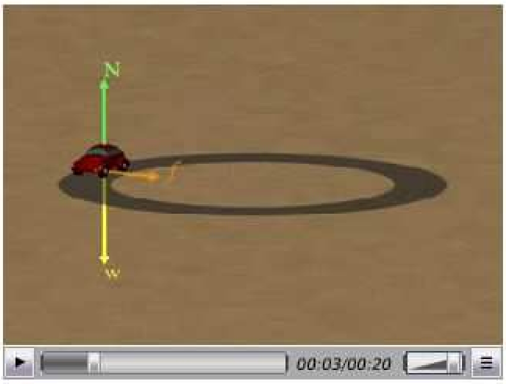
De entre los muchos casos que hay en tu entorno, se proponen algunos casos relevantes:

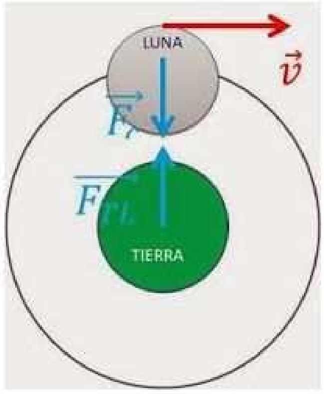
- En ámbitos muy variados, como el lanzamiento de martillo o los loopings de las patrullas acrobáticas aéreas.
- Relacionados con el tráfico, tales como son coches y motos que se mueven en curvas, cambios de rasantes o peraltes.
- Que se dan en parques de atracciones, como es el caso de norias, montañas rusas, carruseles y tubos de la muerte (cilindro por cuya pared interior se mueven motos ¡y hasta coches!).

6.1 La fuerza centrípeta

Ya has visto que las aceleraciones vienen causadas por la existencia de una fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. ¿Cuál es la fuerza que provoca ese cambio de dirección del vector velocidad? ¿Qué la produce? ¿Cuál es el origen de esa fuerza, llamada centrípeta? Ahora vas a ver algunos ejemplos en movimientos circulares, que son los más sencillos e importantes en los que hay fuerzas centrípetas.

Fíjate en el lanzador de martillo, que gira para imprimir velocidad al aparato y que llegue lo más lejos posible cuando lo suelte. Como ves en la imagen, él es quien realiza la fuerza centrípeta, tirando de la cadena y evitando que la bola salga de la trayectoria.





¿Y en el caso de los coches que toman una curva? Si te fijas en el vídeo, aparece una fuerza centrípeta, originada por el rozamiento de las ruedas con la carretera: si no hay rozamiento, el coche sale de la curva. ¿Has oído la expresión "salirse por la tangente"?

Por último, observa la imagen de la Luna girando alrededor de la Tierra. En este caso, la fuerza centrípeta es la fuerza de atracción gravitatoria con la que la Tierra atrae a la Luna.

El valor de la fuerza centrípeta

Ya has visto que las aceleraciones vienen causadas por la existencia de una fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. ¿Cuál es la fuerza que provoca ese cambio de dirección del vector velocidad? ¿Qué la produce?

Esta fuerza centrípeta es la causa de los cambios de dirección de los móviles en su desplazamiento. Puede ser de contacto, como la sirga en un lanzamiento de martillo o el rozamiento entre las ruedas de un coche que toma una curva y el asfalto, o bien a distancia, como la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un satélite o sobre un avión que hace un looping.

Va dirigida al centro de curvatura de la trayectoria (el centro de la circunferencia en el caso más sencillo).

Su módulo viene dado por la expresión $F_c = mv^2 / R$, en la que m es la masa del móvil y, como ya sabes, v^2 / R es la aceleración centrípeta (v es la velocidad y R el radio de giro). Recordando la relación entre las velocidades lineal y angular ($v = \omega R$, donde ω es la velocidad angular), también se puede escribir como $F_c = m\omega^2 R$

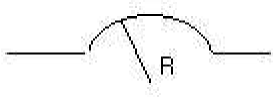
Es decir, simplemente se aplica la ley de la dinámica F=ma.

La fuerza centrípeta

Es la causa de los cambios de dirección del vector velocidad cuando un objeto sigue una trayectoria no rectilínea. Va dirigida hacia el centro de la trayectoria y su módulo viene dado por mv^2 / R o por $m\omega^2 R$.

No es habitual que los móviles describan trayectorias exactamente circulares. Sí se dan en las norias, pero los loopings que describen los aviones son casi circulares, y los cambios de rasante y las curvas de las carreteras son arcos de circunferencia.

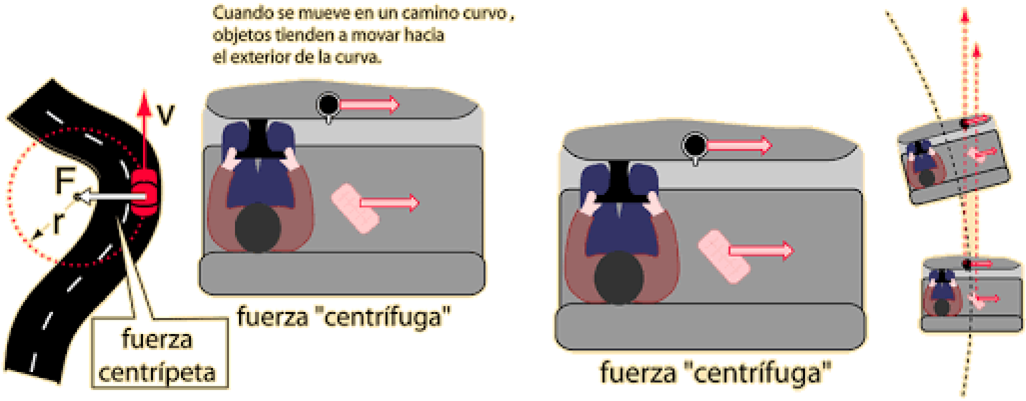
Por tanto, para poder realizar un análisis de las situaciones que nos interese resolver, reduciremos los problemas a trayectorias total o bien parcialmente circulares.



¿Fuerza centrífuga?

Seguro que has oído este término muchas veces: la lavadora centrifuga a 1200 rpm, en el análisis de sangre los tubos se centrifugan en el laboratorio, etcétera. Pero ¿qué hace la fuerza centrífuga?: absolutamente nada, ya que **la fuerza centrífuga no es una fuerza real** que origine algún tipo de efecto relacionado con el giro de los cuerpos.

Imagina que estás sentado dentro de un coche, con los ojos cerrados. El coche circula con rapidez constante por una pista de pruebas, comenzando por una larga recta. En un momento dado, tienes la sensación de que una fuerza te desvía y te quedas pegado a la ventanilla. Como has experimentado una aceleración al cambiar la dirección de tu movimiento, deduces que una fuerza ha actuado sobre ti para provocar ese efecto: precisamente ésa es la fuerza centrífuga.



Si un observador externo hubiera visto la misma situación, ¿cómo la explicaría?: simplemente diría que el coche ha tomado una curva, que sobre él ha actuado una fuerza centrípeta que le obliga a girar (ya veremos más adelante que es la fuerza de rozamiento entre las ruedas y el asfalto), pero que como no actúa sobre ti, sigues con la trayectoria que llevabas, tangente a la trayectoria de la curva, y te desvías hacia la ventanilla.

Ten presente que tu movimiento no lo provoca ninguna fuerza, sino más bien la ausencia de una fuerza, la centrípeta. Eso sí, tú mismo puedes producir esa fuerza centrípeta, agarrándote al asidero que hay encima de la ventanilla.

Fíjate ahora en la montaña rusa: cuando la vagoneta pasa por los cambios de rasante (las cimas) hay que sujetarse para no salir despedido, y por eso se utilizan barras y arneses de retención. ¡Y no es la fuerza centrífuga la que hace salir despedido de las vagonetas, sino la ausencia de centrípeta!

Fuerza centrípeta y fuerza centrífuga

Además de usar la fuerza centrífuga como si fuera real, otro **error muy común** es considerar que **la fuerza centrípeta y la centrífuga forman un par de acción y reacción**; hay que tener presente que esos pares de fuerzas son fuerzas reales que surgen de la interacción entre dos cuerpos.

La fuerza centrífuga

Las fuerzas de inercia no son fuerzas reales, sino ficticias: la fuerza centrífuga no existe, ya que los efectos observados los produce la ausencia de fuerza centrípeta.

Estudio de casos

Ahora es el momento de aplicar lo que sabes acerca de la fuerza centrípeta a algunas situaciones cercanas de gran interés.

¿Cómo vas abordar la interpretación de situaciones en las que hay aceleración centrípeta? Es aconsejable que sigas estos pasos:

- Reconocer que cambia la dirección del vector velocidad.
- Identificar el origen de la fuerza centrípeta que provoca esa aceleración.
- Representar el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el móvil.
- Igualar la fuerza centrípeta concreta a su expresión general (mv^2/R).

Además, vas a considerar la influencia de diferentes factores sobre el movimiento: la velocidad del objeto, su masa, el radio de la trayectoria descrita, la tensión de la cuerda, el coeficiente de rozamiento o el ángulo de inclinación que producen la fuerza centrípeta, etcétera, como irás viendo en cada caso.

¿Qué situaciones analizarás?

- Cuerpos que giran por acción de una ligadura (cuerda, varilla, etcétera), como sucede en el lanzamiento de martillo.
- Coches que toman las curvas en carreteras planas por acción de la fuerza de rozamiento.
- Móviles que hacen un looping (rizan el rizo) por acción de su propio peso.
- Ciclistas y motoristas que se inclinan para tomar mejor las curvas, hasta casi rozar el suelo con la rodilla.
- Velódromos y pistas cubiertas de atletismo con curvas inclinadas (peraltadas).
- Satélites que giran alrededor de los planetas debido a la fuerza gravitatoria.
- Parques de atracciones: montañas rusas con rizos, curvas peraltadas, tubos de la muerte y carruseles.

6.2 Cuerpos enlazados

Fíjate en el vídeo: un lanzador de martillo gira sobre sí mismo, y hace girar la bola de aproximadamente 7,250 kg mediante una sirga metálica. Tras tres o cuatro giros completos, en un momento dado suelta el aparato, que sale en la dirección que llevaba en ese momento, tangente a la trayectoria. Se pueden alcanzar distancias superiores a los 50 m, con un récord mundial por encima de los 85 m.

¿Cuál es la fuerza que hace girar al martillo? La tensión T de la sirga, ejercida por el lanzador y que se transmite a la bola (consideramos que el peso del martillo es perpendicular al plano de giro). Por tanto,

$$T = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

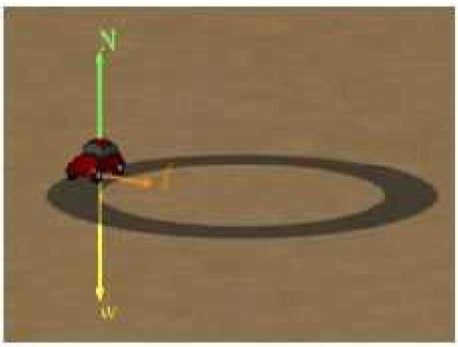
de forma que sabiendo tres de las magnitudes podrás determinar la cuarta.

Cualquier situación en que haya un objeto que gira en un plano horizontal mediante una cuerda tensa, se resuelve de esta forma.

Además, podrás plantearte preguntas sobre cómo influirán las diferentes variables en el proceso. Por ejemplo, ¿por qué es necesario que el lanzador tenga una gran fuerza muscular? ¿Interesa que la sirga sea larga o corta? ¿Cómo influye la rapidez de giro?

6.3 Rozamiento

¿Qué fuerza es la que permite que un coche tome una curva plana? ¿Cuál es la fuerza centrípeta que evita que el coche, como suele decirse, se "salga por la tangente"? ¿De qué depende la velocidad máxima a la que el móvil puede tomar la curva?



La responsable es la **fuerza de rozamiento** entre las ruedas y la superficie de la carretera. Fíjate en el vídeo, en el que se ve que sobre el coche actúan tres fuerzas: su peso, realizada por la Tierra, vertical hacia abajo (w, amarilla); la reacción del suelo en el que se apoya, vertical hacia arriba (N, verde) e igual en módulo al peso, con lo que en la dirección vertical la fuerza resultante es nula; y, por último, la fuerza de rozamiento entre el coche y la superficie de apoyo, dirigida hacia el centro de curvatura y responsable de que el coche tome la curva sin peligro (f, naranja).

En realidad, el coche empuja a la pista hacia fuera de la curva, y la pista, por reacción, realiza sobre el coche una fuerza hacia el interior de la curva: ése es el origen de la fuerza centrípeta.

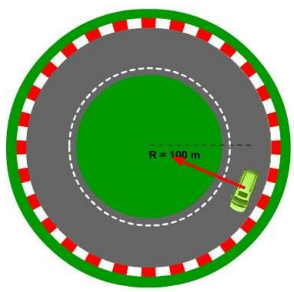
Utilizando la expresión de la fuerza de rozamiento que ya conoces, se tiene que:

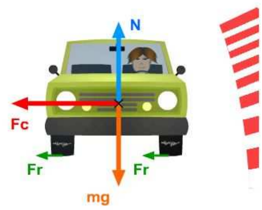
$$\mu mg = \frac{mv^2}{R}$$

con lo que la expresión de la velocidad se reduce a:

$$v = \sqrt{\mu gR}$$

Es decir, cuanto mayor sea el radio de curvatura y el coeficiente de rozamiento, mayor será la velocidad máxima a la que se puede tomar una curva sin derrapar, pero la masa no influye.





Observa el simulador y modifica la rapidez del coche; verás como la fuerza de rozamiento se deberá ir incrementando para proporcionar la fuerza centrípeta suficiente como para que el coche describa la curva sin salirse de ella.

6.4 Cambios de rasante

Los cambios de rasante son arcos de circunferencia que habitualmente tienen un radio bastante grande, pero que pueden provocar que el coche vuele si pasa a demasiada velocidad. No hay más que ver el vídeo para comprobarlo.

Resultan tan peligrosos por esa razón que hasta hay una señal de tráfico específica para indicarlo.

¿Cuál es la fuerza centrípeta?: en el punto más alto es la resultante del peso y la normal (P - N). La situación límite para que el coche no "vuele" es que la normal sea cero en ese punto. En este caso, la fuerza centrípeta es el peso del móvil que pasa el cambio de rasante. Es decir,

$$mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$$

Como puedes ver, la velocidad máxima de paso por el cambio de rasante depende únicamente de su radio de curvatura, pero no de la masa del móvil. La dependencia no es lineal: un radio cuatro veces mayor supone una velocidad doble.

También depende del valor de g, que no presenta variaciones apreciables en la Tierra y, por tanto, influye en menor medida (recuerda que al aumentar la altura g disminuye).

6.5 Rizando el rizo

Resulta extraordinariamente espectacular ver cómo móviles pequeños (bolas) o grandes (coches) recorren una pista vertical describiendo una circunferencia; se dice que están haciendo un **looping**, y también que están **rizando el rizo**.

Observa en el vídeo el movimiento del coche: riza el rizo con toda facilidad, entrando en él desde un tramo horizontal y saliendo por otro tramo también horizontal.

Ahora solamente te vas a ocupar del aspecto dinámico de la situación, relacionando la fuerza centrípeta con la velocidad de giro y el radio de la pista, pero en el tema siguiente analizarás los aspectos energéticos de este mismo caso.

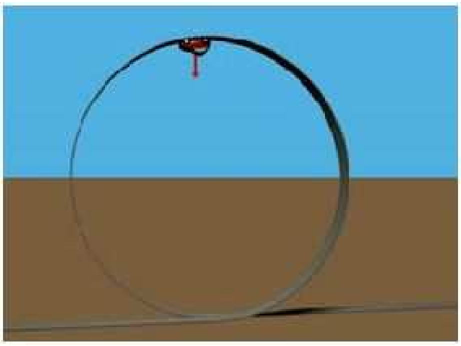
Si te fijas, en el punto más alto la velocidad es menor que la de entrada y de salida del rizo; parece que, durante un instante, el coche va a quedarse suspendido en el aire.

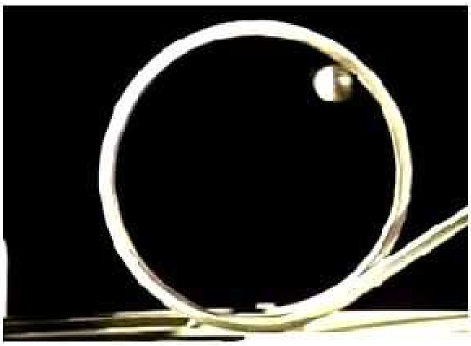
¿Qué crees que sucedería si la velocidad de entrada fuese un poco menor? ¿Rizaría el rizo?

¿Cuál es la fuerza centrípeta que permite que el móvil describa el giro? Cuando entra en la pista vertical, la normal del suelo va dirigida hacia arriba, hacia el centro de giro; conforme va subiendo, la normal va siendo cada vez menor. Incluso puede llegar a anularse, con lo que en el punto más alto del giro la fuerza centrípeta será el peso del móvil.

En la animación de la izquierda puedes ver en amarillo la fuerza normal, que se anula en la parte superior del rizo. Se aprecia muy bien cómo el coche casi se detiene en el punto más alto.

En el vídeo de la derecha, la bola describe perfectamente el giro si se deja caer desde bastante altura por la rampa de acceso al rizo. Pero si se deja caer desde poca altura, se despega de la pista antes de llegar al punto más alto y no lo describe totalmente.





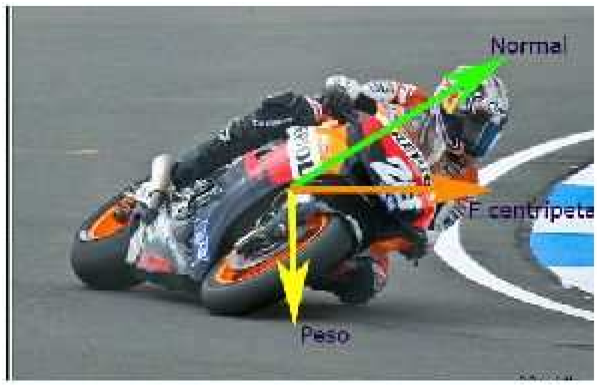
6.6 Moto GP

¿Qué característica especial tienen las motos? Seguro que sabes que los motoristas inclinan su máquina para tomar mejor las curvas. Fíjate en cómo toma una curva Dani Pedrosa.

Naturalmente, hay rozamiento con el asfalto, pero no es suficiente para tomar la curva a la velocidad que necesitan llevar. Al inclinarse aumenta la fuerza centrípeta, y eso permite tomar la curva a mayor velocidad, o tomar a una velocidad dada una curva de radio pequeño.

¿Qué fuerzas reales actúan sobre la moto? El rozamiento, como siempre, porque en caso contrario la moto no podría circular; cuando toma la curva, produce fuerza centrípeta, como ya has visto antes. Además, también actúan el peso ejercido por la Tierra, y la normal, realizada por la superficie.

Observa ahora el diagrama de fuerzas: la resultante del peso y la normal es una fuerza dirigida hacia el centro de la curva. Se representa solamente la contribución de la inclinación a la fuerza centrípeta: para obtener el valor total habría que sumar la fuerza de rozamiento.



Sin tener en cuenta el rozamiento, siendo α el ángulo de inclinación de la moto respecto de la vertical, se cumple que:

$$\tan\alpha = \frac{F_{centrípeta}}{Peso} = \frac{F_c}{mg} \quad \Rightarrow \quad F_c = mg\tan\alpha$$

Inclinación y fuerza centrípeta

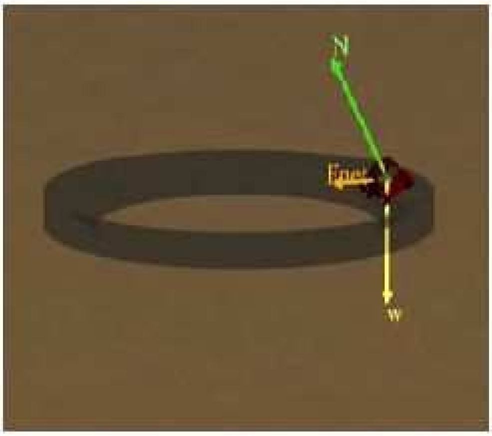
La inclinación de una moto, bicicleta o cualquier otro móvil al tomar una curva aumenta la fuerza centrípeta que le permite tomar la curva con mayor velocidad y seguridad.

6.7 Peraltes

Para conseguir que una curva se pueda tomar a mayor velocidad, hay que peraltarla, elevando la parte exterior para que el móvil experimente el mismo efecto que produce la inclinación de un motorista: aumentar la fuerza centrípeta.

Observa el vídeo para ver el origen de la fuerza centrípeta. Fíjate en que al aumentar la inclinación respecto de la horizontal también lo hace la fuerza centrípeta.

Los peraltes son muy llamativos en las pistas que tienen curvas muy cerradas, como es el caso de los velódromos y las pistas cubiertas de atletismo (de 200 m de cuerda, en lugar de los 400 de las pistas al aire libre). Resulta extraordinariamente difícil andar o correr por ellos.



También hay en los circuitos de automovilismo y motociclismo, pero se notan mucho menos a simple vista, aunque su efecto sí resulta apreciable.

6.8 Parques temáticos

La fuerza centrípeta resulta necesaria para explicar cómo funcionan muchos aparatos de los parques temáticos.

En los **carruseles de caballitos** hay que sujetarse a la barra para no salir despedido: el niño tira de la barra hacia fuera, y la barra empuja al niño hacia adentro, produciéndose la fuerza centrípeta necesaria.

En las **montañas rusas** hay subidas y bajadas vertiginosas: al llegar a una de las cimas, las barras de sujección y los arneses evitan que los pasajeros salgan despedidos. Además, hay curvas muy pronunciadas, que se tienen que peraltar para poderlas tomar a gran velocidad. También hay tirabuzones, y, por supuesto, loopings.

En estos dos vídeos puedes ver, en primer lugar, un modelo de montaña rusa montado con un juguete de construcción con piezas de plástico del tipo mecano. A la derecha, hay una filmación hecha desde una vagoneta que va por una montaña rusa con un triple looping y todo tipo de ascensos, descensos y tirabuzones.

¿Cuál es la fuerza centrípeta que obliga a seguir esas trayectorias? Las vagonetas están sujetas a los raíles, por lo que la fuerza necesaria la proporcionan esas sujecciones, mientras que los ocupantes reciben la acción directa de barras y arneses.

7. Interacciones gravitatorias

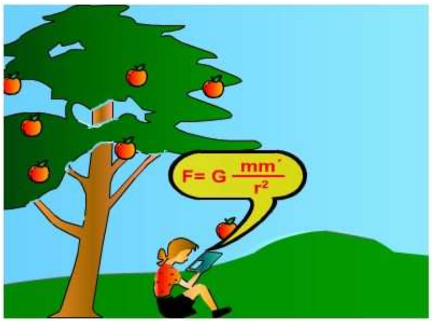
Al analizar la caída libre de los objetos ya viste que caen con una aceleración que tiene un valor de aproximadamente 9,8 m/s^2 a nivel del mar. ¿Ese valor depende de la masa de los objetos que se dejan caer?

La masa de los cuerpos y la aceleración de la gravedad

Puedes comprobar fácilmente que **el tiempo de caída es independiente de la masa** del objeto, por lo que puedes concluir que la aceleración de caída no depende de la masa del cuerpo que cae.

7.1 La gravitación universal

Dice la leyenda que estando descansando Newton debajo de un manzano le cayó una manzana en la cabeza y se le ocurrió que caía porque la Tierra la atraía. Ése fue el origen de la teoría de la gravitación, que publicó a finales del siglo XVII ¡De tal forma se relaciona a Newton con la manzana que hasta se hacen muñecos!



La Tierra atrae a los objetos con una fuerza que ya sabes que se llama peso. Pero se trata de una fuerza que se produce entre todos los cuerpos del universo por el hecho de tener masa, de forma que un cuerpo 1 atrae a un cuerpo 2, mientras que el cuerpo 2 a su vez atrae al cuerpo 1 (son dos fuerzas de acción y reacción).

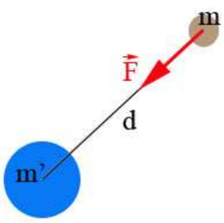
La ley de gravitación universal

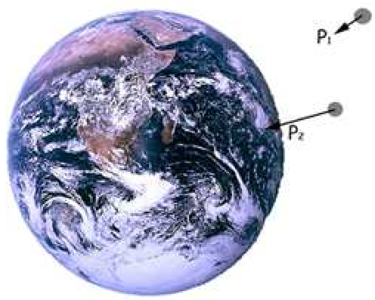
La fuerza de atracción gravitatoria F entre dos masas m y m' es:

$$F = G\frac{mm'}{d^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal (6,67 10-11 N m^2 kg^{-2}) y d es la distancia entre las dos masas.

La fuerza de atracción entre los cuerpos se produce en la dirección que los une, como puedes ver en la imagen. En el caso del peso de un cuerpo, va dirigida siempre hacia el centro de la Tierra, esté donde esté el cuerpo y tenga la masa que tenga.





Fíjate en que al duplicarse la masa de un cuerpo, la fuerza gravitatoria se duplica, mientras que al duplicarse la distancia, la fuerza de atracción se hace cuatro veces menor. Puedes comprobarlo utilizando el simulador o analizando la expresión de la ley de gravitación universal.

El valor de g

Si en la ley de gravitación universal m' es la masa de la Tierra (MTierra) y d su radio (RTierra), F será el peso P del objeto de masa m en la superficie de la Tierra, por lo que puedes deducir que el valor de g es:

$$F = G\frac{mm'}{d^2} \quad y \quad P = mg$$

$$g = G\frac{m'}{d^2} = G\frac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}$$

Si sustituyes los valores de la masa de la Tierra ($5{,}97\ 10^{24}$ kg) y de su radio medio (6371 km) obtendrás un valor de g de 9,81 N kg^{-1}. Es decir, una masa de un kg queda atraída por una fuerza de 9,81 N.

Significado y unidades de g

Como tiene dos significados diferentes, también tiene dos unidades distintas. Por un lado, es la aceleración de caída libre, que en la superficie de la Tierra y a nivel del mar es de **9,81 m s^{-2}**, pero por otro es la fuerza con la que la Tierra atrae a una masa de un kg, que en las mismas condiciones tiene un valor de **9,81 N/kg**.

Entre la Tierra y la Luna

Los cuerpos sufren la atracción de cualquier otro cuerpo que hay en el Universo. Lo que sucede es que si la distancia entre ellos es grande en comparación con el tamaño y la masa del cuerpo que genera la atracción, la fuerza es tan pequeña que se puede despreciar.

Por ejemplo, un cuerpo en la superficie de la Tierra también experimenta la fuerza de atracción de la Luna, pero como su valor es muchísimo menor que la atracción que realiza la Tierra sobre él, no hay que tenerla en cuenta.

¡Y tampoco tienes que tener en cuenta la atracción gravitatoria que realiza sobre ti cualquiera de las personas que tienes cerca!

7.2 El peso de los cuerpos

Cuando la fuerza gravitatoria la ejerce un astro sobre un objeto situado cerca de su superficie, la fuerza realizada se llama peso. Por esa razón se habla de peso en la Tierra, en la Luna, en Marte, etc.

Si aplicas la ley fundamental de la dinámica en la caída libre, en la que la única fuerza que actúa es el peso, tendrás que **ΣF = ma** se reduce a **P = mg**, con lo que la aceleración de caída libre tendrá el valor de g, que es de 9,81 m s^{-2}.

Fíjate en que el transbordador espacial tiene más masa que el satélite, por lo que su peso es mayor (el vector que lo representa es más largo). Observa que al alejarse, el peso es menor, y que siempre está dirigido al centro de la Tierra. También se representa la fuerza de reacción ejercida en cada caso sobre la Tierra.

El peso de los cuerpos y la altura

El valor de g obtenido es cierto para una distancia al centro de la Tierra de 6371 km, que es un valor promedio, ya que la Tierra está achatada por los polos. Naturalmente, al aumentar la distancia disminuye g, por lo que **el peso de los cuerpos es menor al aumentar la altura**. En la cima del Everest, que tiene 8,8 km de altura, tiene un valor de 9,78 ms^{-2}.

El peso en la Luna

En la superficie de la Luna la aceleración de la gravedad tiene un valor distinto, ya que los valores de su masa y su radio son distintos (7,35 10^{22} kg y 1737,4 km). Sustituyendo en la ley de gravitación universal, g tiene un valor de 1,62 ms^{-2}. Como es un valor muy pequeño, **los astronautas pesan mucho menos en la Luna que en la Tierra** (aproximadamente, la sexta parte), por lo que al moverse dan grandes saltos con facilidad.

La masa y el peso

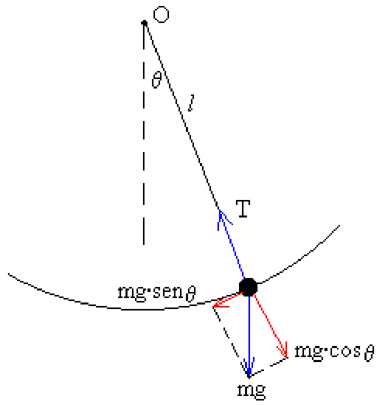
La masa es la cantidad de materia de un objeto. Se mide en una balanza y su unidad de medida es el kilogramo.

El peso es una fuerza que resulta de la interacción de dos cuerpos con masa. Se mide con un dinamómetro y su unidad de medida es el Newton.

La masa es invariante, lo que quiere decir que no varía independientemente de dónde se encuentre; sin embargo, el peso puede variar dependiendo del lugar donde se mida.

7.3 El péndulo

El péndulo simple



Se trata de una masa puntual que cuelga de una cuerda inextensible y sin peso, y que al separarlo de su posición de equilibrio oscila con un movimiento armónico simple (repite las mismas posiciones cada cierto tiempo, el periodo de su oscilación).

Se puede hacer una estimación del valor de la gravedad, g, mediante un tratamiento experimental de la oscilación de diferentes péndulos, ya que la demostración matemática queda para la Física de 2º de Bachillerato.

Estimando el valor de g

Se puede demostrar la relación existente entre el periodo de oscilación del péndulo, su longitud y el valor de la aceleración de la gravedad, g.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como has determinado el valor de T para diferentes longitudes de oscilación, no tienes más que calcular el valor de g y ver si el error cometido en la determinación es pequeño.

7.4 Planetas y satélites

La Luna gira alrededor de la Tierra, y el satélite Meteosat también, solo que a una distancia mucho menor.

¿Cuál es el origen de la fuerza centrípeta responsable de esos movimientos de rotación?: la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y esos cuerpos. Es decir, su propio peso es la fuerza que hace cambiar continuamente la dirección del vector velocidad de los satélites, originando en esos casos el movimiento circular uniforme.

Para resolver situaciones en las que intervengan satélites (o planetas girando alrededor del Sol), solamente tienes que tener en cuenta la ley de gravitación universal y los conceptos relacionados con el movimiento circular uniforme.

¿Qué fuerza hace girar a los satélites?

La atracción gravitatoria es el origen de la fuerza centrípeta que permite que los satélites giren alrededor de los planetas.

7.5 Leyes de Kepler

De la escuela pitagórica a Kepler

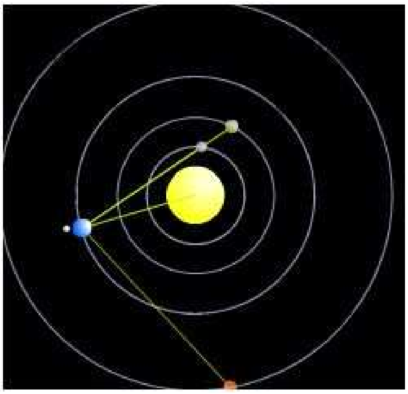
El camino histórico que lleva hasta el establecimiento de la ley de la gravitación universal fue largo y sinuoso. Pero es, a la vez, uno de los ejemplos más interesantes que se pueden encontrar en la Historia de la Ciencia. En este proceso de construcción del saber científico cabe distinguir dos etapas: en primer lugar, la descripción del movimiento planetario y, en segundo, el análisis de las causas del mismo.

Ya desde la escuela pitagórica, los astrónomos griegos se preocuparon por dar una interpretación al movimiento de los astros, procurando describir el Universo en términos geométricos y numéricos.

Después de la propuesta de Eudoxo (408-355 a.C.) y Calipo (330 a.C.), la teoría de las esferas homocéntricas, una de las primeras teorías capaces de explicar la cinemática del Sistema Solar, fue la defendida por Hiparco (190-120 a.C). Se trata de la **teoría geocéntrica**, según la cual la Tierra se encontraba estacionaria en el centro, mientras que los planetas, el Sol y la Luna giraban en torno a ella.

Como las órbitas circulares simples no podían explicar los complicados movimientos de los planetas, Hiparco supuso que el planeta describe, con movimiento uniforme, una circunferencia -llamada epiciclo- alrededor de un punto D, el cual, a su vez, se mueve sobre otra circunferencia mayor con centro en la Tierra -de nombre deferente-. La trayectoria resultante es una epicicloide.

Claudio Ptolomeo (85-165 d.C.) adoptó y desarrolló el sistema utilizado por Hiparco. El número de movimientos periódicos conocidos en aquel momento era ya enorme: hacían falta unos ochenta círculos para explicar los movimientos aparentes de los cielos. El propio Ptolomeo llegó a la conclusión de que tal sistema no podía tener realidad física, considerándolo una conveniencia matemática. Su famoso tratado de astronomía, el Almagesto, fue una obra capital durante toda la Edad Media y, aún hoy, constituye la fuente de nuestro conocimiento acerca de las ideas de los astrónomos griegos.

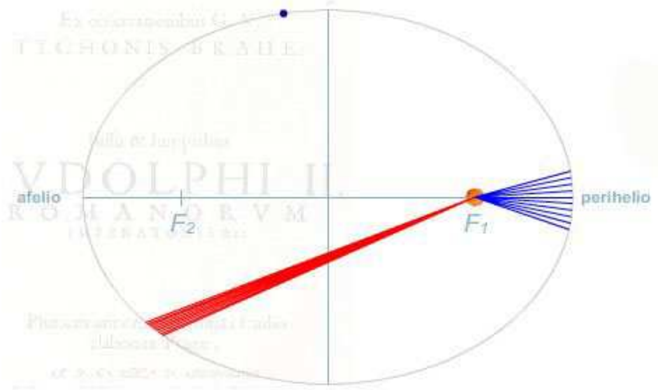


En el siglo XVI, **Nicolás Copérnico** (1473- 1543), con la publicación en 1543 de su obra De Revolutionibus Orbium Caelestium, inaugura un profundo cambio en el pensamiento astronómico: frente a la teoría geocéntrica, propuso la llamada teoría heliocéntrica. En ella el Sol era el centro del Sistema Solar y la Tierra, al igual que el resto de los planetas, giraba en torno a él. Con esta teoría, Copérnico, que seguía utilizando circunferencias, epiciclos y distribuciones similares, proporcionó una descripción más simple del movimiento planetario. Sobre todo, estableció las bases para el futuro desarrollo de la imagen del Sistema Solar.

Las ideas de Copérnico estimularon a algunos astrónomos, entre los que se encontraba **Tycho Brahe** (1546-1601). Brahe pasó su vida recopilando datos referentes al movimiento de los planetas; sus medidas eran de una precisión extraordinaria para la tecnología de la época, máxime si consideramos que aún no se había inventado el telescopio. Su ayudante **Johannes Kepler** (1571-

1630), a partir de los datos obtenidos por Brahe y con el modelo de Copérnico, enunció las leyes que llevan su nombre y que describen cinemáticamente el movimiento de los planetas.

Planeta	Distancia al Sol (r en U.A.)	Periodo de revolución (T en años)	Relación de Kepler (T^2/r^3)
Tierra	1,0000	1,0000	1,000
Mercurio	0,3885	0,2405	0,986
Marte	1,5302	1,8797	0,986
Júpiter	5,2215	11,8354	0,984



Leyes de Kepler

1. Los planetas describen órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos (**ley de las órbitas**). Se termina así con las órbitas circulares, la más antigua premisa que hasta ese momento unía al sistema copernicano con el modelo griego.

2. El vector de posición de cualquier planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales (**ley de las áreas**).

3. Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al Sol (**ley de los periodos**).

El año marciano (¿otra vez?)

Ya has calculado la duración del año marciano. Ahora solamente debes fijarte en que en realidad has utilizado la tercera ley de Kepler para hacerlo, aunque la has deducido a partir del movimiento circular uniforme que llevan la Tierra y Marte alrededor del Sol.

8. Interacciones eléctricas

Además de la masa, la carga es otra de las propiedades fundamentales de la materia. De hecho, dos de las tres partículas fundamentales tienen carga: negativa los electrones y positiva los protones. Si un objeto es neutro, significa que tiene tantas cargas positivas (protones) como negativas (electrones); si tiene carga, es porque hay exceso de unas o de otras.

Como los protones se encuentran situados en el núcleo de los átomos y los electrones en la corteza electrónica, alrededor del núcleo, son estos últimos las partículas que pueden moverse entre los cuerpos: si un objeto es negativo, es porque ha ganado electrones, y si es positivo es porque los ha perdido.

Entre las partículas cargadas también se realizan fuerzas a distancia. El primer estudio cuantitativo de estas fuerzas lo realizó Coulomb en 1785, y tras numerosos experimentos obtuvo las siguientes conclusiones sobre la fuerza de interacción eléctrica entre dos cuerpos cargados:

1. Tiene la dirección de la recta que une los dos cuerpos.

2. Tiene sentido atractivo si las cargas son de signo distinto, y repulsivo si son del mismo signo.

3. Su intensidad es directamente proporcional al valor de las cargas de los cuerpos.

4. Su valor es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa los cuerpos cargados.

Precisamente en su honor, la unidad de carga eléctrica se llama culombio (C).

Puedes comprobar estos extremos con el siguiente simulador. La flecha indica la intensidad de la repulsión, mayor cuanto más cerca se encuentren las dos cargas, y su dirección y sentido hacia dónde se desplazaría la carga móvil si estuviese libre. Aunque el simulador no permite trabajar con cargas negativas, las conclusiones serían las mismas.

La ley de Coulomb

Coulomb expresó sus conclusiones en una ley de aspecto similar a la ley de Gravitación Universal de Newton.

$$F = K\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

donde q_1 y q_2 son los valores de las cargas, d la distancia que las separa y K una constante cuyo valor depende del medio en el que se encuentran las cargas ($9\ 10^9$ N m^2 C^{-2} en el vacío).

Importancia y validez de la ley de Coulomb

La ley de Coulomb es fundamental para explicar la estructura de la materia: la atracción entre el núcleo, positivo, y los electrones de la corteza, negativos; las fuerzas que unen los átomos para formar moléculas o estructuras iónicas y las propiedades de las sustancias formadas.

Pero tiene sus limitaciones, ya que solamente es válida para cargas puntuales o cuerpos esféricos que estén alejados entre sí; es decir, cuando el radio de los objetos es despreciable frente a la distancia que los separa.

Como has visto en el simulador, las fuerzas eléctricas son centrales, ya que los cuerpos que experimentan estas fuerzas se mueven en la dirección de la línea que une sus centros.

Interacciones eléctricas y gravitatorias

Estos dos tipos de interacciones fundamentales se parecen tanto por ser las dos fuerzas centrales como por su expresión formal, siendo inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre los cuerpos que interaccionan.

Pero hay diferencias muy notables.

1. Las interacciones gravitatorias dependen del producto de las masas y las eléctricas del producto de las cargas que interaccionan.

2. Las interacciones gravitatorias son universales, mientras que las eléctricas se dan solamente si los cuerpos tienen carga neta (no nula).

3. Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, mientras que las eléctricas también pueden ser repulsivas, dependiendo del signo de las cargas.

4. La constante gravitatoria G es universal, mientras que la eléctrica K depende del medio en el que están los cuerpos que interaccionan.

5. La constante eléctrica es del orden de 10^{20} veces mayor que la gravitatoria. Esto significa que las fuerzas eléctricas son mucho más intensas que las gravitatorias.

6. Los cuerpos siempre ejercen interacciones gravitatorias por el hecho de tener masa, tanto en reposo como en movimiento. Pero las cargas en movimiento, además de fuerzas eléctricas también producen interacciones magnéticas.

8.1 Fuerzas eléctricas

El principio de superposición

Si una carga está sometida a la acción de varias fuerzas independientes, producidas por cargas diferentes, la fuerza resultante que actúa sobre ella se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.

Lo más sencillo, si es necesario, es obtener las componentes de todas las fuerzas en los ejes X e Y, calcular las componentes totales y obtener finalmente la fuerza resultante a partir de esas componentes.

Fuerzas a escala atómica

Cuando los electrones se mueven en los átomos alrededor del núcleo, la situación se puede asimilar a una carga negativa que gira alrededor de una positiva. Por tanto, se manifiestan interacciones gravitatorias (debido a la masa del núcleo y de los electrones) y eléctricas (debido a su carga, negativa en un caso y positiva en el otro).

¿Cómo son los valores de esas fuerzas entre sí? ¿Son del mismo orden, y hay que tener en cuenta las dos, o una es mucho menor que la otra, y se puede despreciar?

Para saberlo, vamos a estudiar el caso más sencillo: el átomo de hidrógeno, con un protón en el núcleo y un electrón que gira alrededor de él a una distancia de $5{,}29\ 10^{-11}$ m (0,529 Å) según el modelo de Bohr.

Fuerza eléctrica

Como las cargas de protón y electrón son del mismo valor ($1{,}6\ 10^{-19}$ C) pero de signo contrario, la fuerza entre las dos partículas es atractiva, y tiene un valor de:

$$F_e = K\,\frac{q_p q_e}{r^2} = 9\,10^{-9}\,Nm^2C^{-2}\,\frac{1{,}6\,10^{-19}\,C\;1{,}6\;10^{-19}\,C}{(5{,}29\,10^{-11}\,m)^2} = 8{,}32\;10^{-8}\,N$$

Fuerza gravitatoria

En este caso, la fuerza siempre es atractiva. Teniendo en cuenta los valores de las masas del protón y del electrón, tiene un valor de:

$$F_g = G\frac{m_p m_e}{r^2} = 6{,}67\,10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\,\frac{1{,}67\,10^{-27}\,kg\;9{,}11\,10^{-31}kg}{(5{,}29\,10^{-11}m)^2} = 3{,}63\,10^{-47}\,N$$

Comparación de las dos fuerzas

Comparando los dos resultados, puedes observar que la fuerza eléctrica es nada menos que 2,27 10^{39} veces mayor que la gravitatoria, que es absolutamente despreciable en comparación con ella.