LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA

¿Qué es eso de la velocidad instantánea?

A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de un cuerpo en un instante determinado. En un instante t_1 el cuerpo está localizado mediante un solo punto x_1. Si está en un solo punto, ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿no debería permanecer en el mismo punto?

Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta de que para caracterizar el movimiento debemos observar la posición del cuerpo en dos momentos concretos: x_1 para t_1 inicial y x_2 para t_2 final, con una variación de posición $\Delta x=x_2-x_1$ en un intervalo de tiempo $\Delta t=t_2-t_1$.

La velocidad instantánea se puede determinar como la velocidad media en un intervalo lo suficientemente pequeño como para que se pueda considerar constante durante todo ese intervalo. Matemáticamente, es el límite del cociente $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero, esto es:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

Este límite es la derivada de x respecto a t, cuya notación es dx/dt.

En caída libre

La posición de una manzana que se deja caer desde la azotea de un edificio alto viene dada por la ecuación **$y = 4{,}9\ t^2$** donde **y** se mide en metros (m) y hacia abajo desde la posición inicial y **t** se expresa en segundos (s). Para saber la velocidad instantánea a los 2 s de caída, la posición inicial es siempre de 19,6 m, que es la ocupada por el móvil a los 2 s.
Resulta muy interesante realizar el análisis numérico del proceso del paso al límite, calculando la velocidad media para intervalos de tiempo cada vez menores.

t_1 (s)	Δt (s)	t_2 (s)	y_2 (m)	Δy (m)	$\Delta y/\Delta t$ (m/s)
2	1	3	44,1	24,5	24,5
2	0,5	2,5	30,625	11,025	22,05
2	0,2	2,2	23,716	4,116	20,58
2	0,1	2,1	21,609	2,009	20,09
2	0,05	2,05	20,59225	0,99225	19,845
2	0,01	2,01	19,79649	0,19649	19,649
2	0,005	2,005	19,6981225	0,0981225	19,6245
2	0,001	2,001	19,6196049	0,0196049	19,6049
2	0,0001	2,0001	19,601960005	0,001960049	19,60049

Fíjate en que conforme el intervalo de tiempo se va reduciendo, la velocidad va tendiendo al valor 19,6, que representa el valor de la velocidad que lleva el móvil justo a los dos segundos (19,6 m/s).

¿Cómo se calcula la derivada de una función?

También puedes llegar a ese resultado utilizando la expresión del límite para la derivada. En el caso de la caída libre **$y=4{,}9t^2$**.

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4{,}9(t+\Delta t)^2-4{,}9t^2}{\Delta t}=\frac{4{,}9(t^2+(\Delta t)^2+2t\Delta t)-4{,}9t^2}{\Delta t}=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4{,}9t^2 + 4{,}9(\Delta t)^2 + 9{,}8t\Delta t - 4{,}9t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4{,}9(\Delta t)^2 + 9{,}8t\Delta t}{\Delta t} =$$

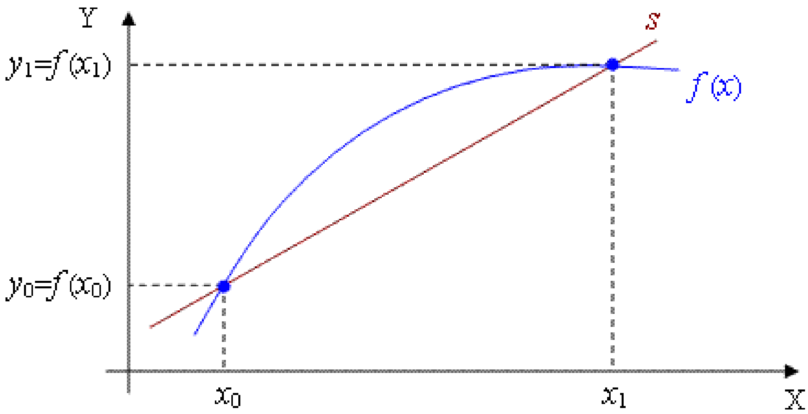
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(4{,}9\Delta t + 9{,}8t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4{,}9\Delta t + 9{,}8t) = 9{,}8t$$

Para t=2 s sustituyendo en la expresión anterior la velocidad instantánea es de 19,6 m/s.

La técnica operativa para calcular funciones derivadas de una dada ya la verás (o habrás visto) en Matemáticas. El caso que nos interesa ahora es el de una función polinómica, por ejemplo del tipo $y=ax^2+bx+c$. La función derivada se calcula derivando cada uno de los sumandos, que en el ejemplo anterior resulta ser $dy/dx=2ax+b$.

En el caso de la caída libre anterior, en el que la función es $y=4{,}9t^2$, la función derivada es $dy/dt=9{,}8t$, que cuando t=2 s tiene un valor de 19,6 m/s.

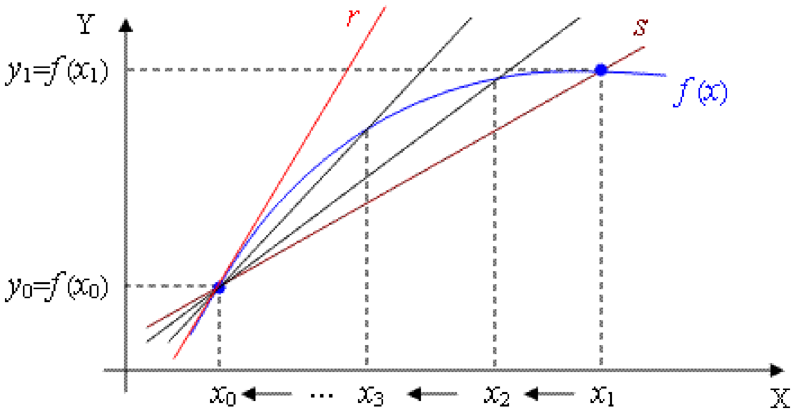
Significado gráfico de la derivada



La inclinación o pendiente de la recta secante a la función en los puntos de trabajo, m, se puede calcular como:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Ahora bien, si nos planteamos acercar el punto (x_1,y_1) al punto (x_0,y_0), es decir, que $\Delta x \to 0$, la recta secante s se convertirá en el límite en la recta r tangente a la función f(x) en el punto (x_0,y_0). Gráficamente tendríamos:



En resumen, **dada una función su derivada en un punto proporciona la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto**.